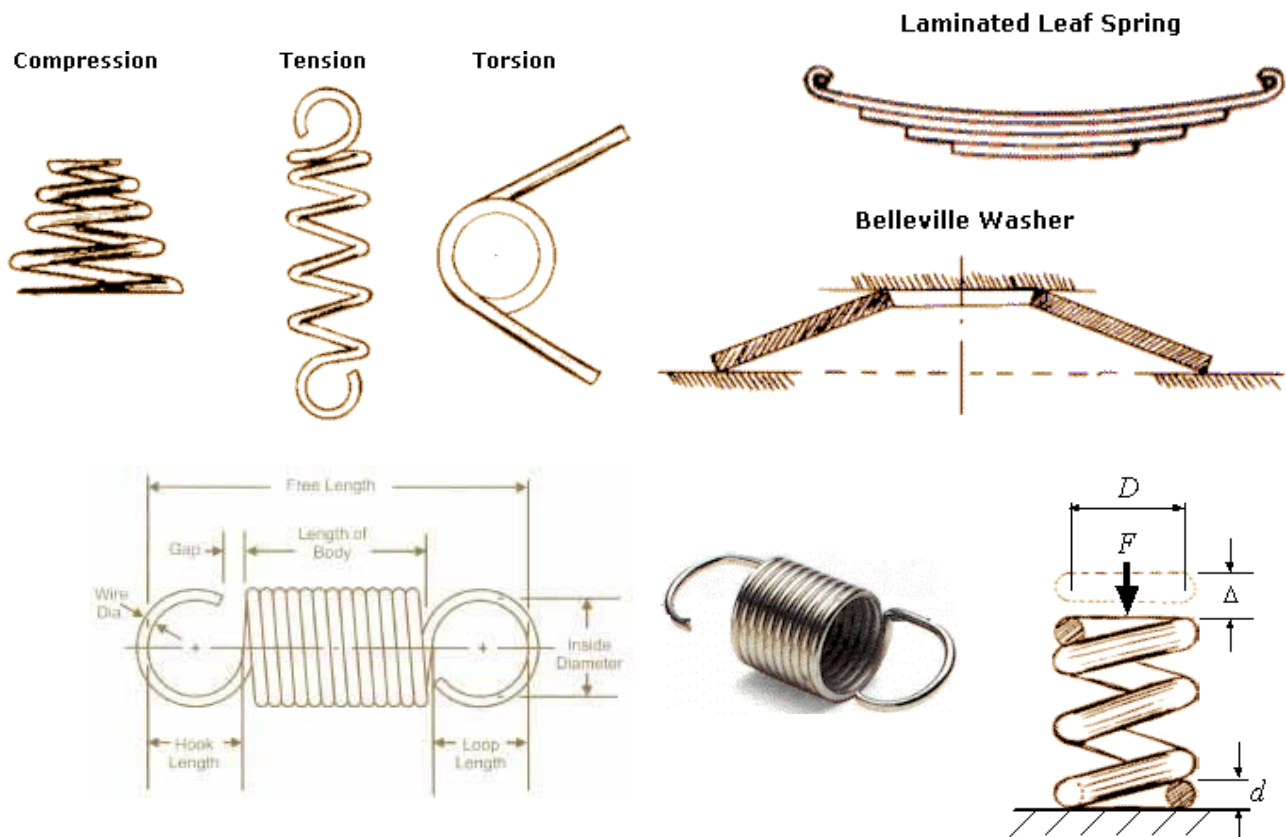


فنرها

هنگامی که در قسمتی از ماشین نیاز به انعطاف تحت اثر نیرو یا گشتاور باشد از فنر استفاده می شود. در اثر انعطاف پذیری فنر (یا تغییر شکل فنر)، همیشه مقداری انرژی در آن ذخیره می شود که قابل بازیابی است. شکل فنرها بنا به نوع کاربرد بسیار متنوع می باشد اما در کلیه آنها، انرژی در محدوده تغییر شکل الاستیک ذخیره و سپس آزاد می گردد.



♦ ویژگی های مواد فنرها:

▪ استمکام:

برای ارزیابی استحکام فنرها می توان نسبت S/E را مبنا قرار داد.

Engineering polymers : $0.01 < S/E < 0.1$ (S= Yield strength)

Metals : $0.001 < S/E < 0.01$ (S= Yield strength)

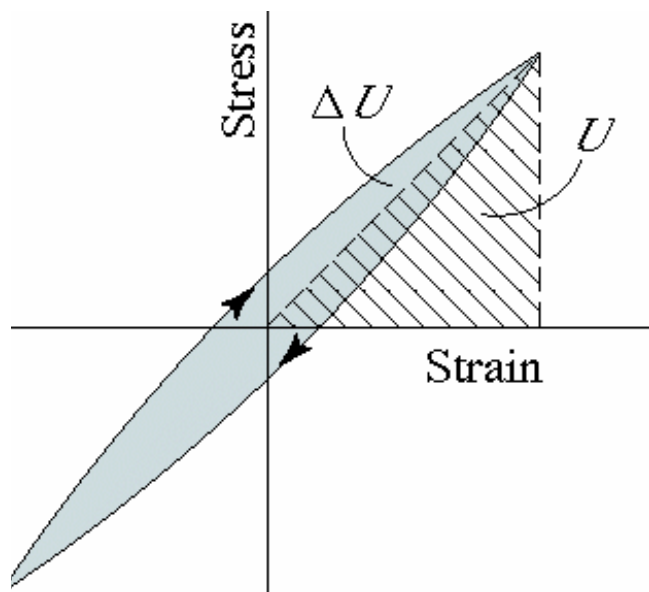
Composite materials : $S/E \approx 0.01$ (S= Tensile strength)

Elastomers : $0.1 < S/E < 1$ (S= Tear strength)

با توجه به مقادیر تقریبی فوق مشاهده می شود که الاستومرها دارای بالاترین نسبت $\frac{S}{E}$ می باشند.

▪ استهلاک انرژی:

استهلاک انرژی بر مبنای یک سیکل بارگذاری و باربرداری برآورد می شود.



U : انرژی ذخیره شده در اثر تغییر شکل الاستیک

ΔU : اختلاف انرژی ذخیره شده و آزاد شده

در یک سیکل

Δ_{loss} : ضریب افت انرژی

$$\Delta_{loss} = \frac{\Delta U}{2U}$$

❖ موادی که برای سافت فتر استفاده می شوند باید دارای حداقل استهلاک انرژی باشند.

❖ ضریب استهلاک انرژی الاستومرها بیشترین مقدار و برای فولادهای پر کربن کمترین مقدار است.

Common name	Specification	Modulus of Elasticity, E, psi	Shear modulus of elasticity, G, psi	Density, ρ , lbf/in. ³	Maximum service temperature °F	Principal characteristics
High carbon steels						
Music wire	ASTM A228	30×10^6	11.5×10^6	0.283	250	High strength; excellent fatigue life
Hard drawn	ASTM A227	30×10^6	11.5×10^6	0.283	250	General purpose use; poor fatigue life
Stainless steels						
Martensitic	AISI 410, 420	29×10^6	11×10^6	0.280	500	Unsatisfactory for subzero applications
Austenitic	AIAI 301, 302	28×10^6	10×10^6	0.282	600	Good strength at moderate temperatures; low stress relaxation
Copper-based alloys						
Spring brass	ASTM B134	16×10^6	6×10^6	0.308	200	Low cost; high conductivity; poor mechanical properties
Phosphor bronze	ASTM B159	15×10^6	6.3×10^6	0.320	200	Ability to withstand repeated flexures; popular alloy
Beryllium copper	ASTM B197	19×10^6	6.5×10^6	0.297	400	High elastic and fatigue strength; hardenable.
Nickel-based alloys						
Inconel 600	-	31×10^6	11×10^6	0.307	600	Good strength; high corrosion resistance
Inconel X-750	-	31×10^6	11×10^6	0.298	1100	Precipitation hardening; for high temperatures
Ni-Span C	-	27×10^6	9.6×10^6	0.294	200	Constant modulus over a wide temperature range

▪ استمکام نهایی:

مقدار σ_{ut} تغییرات شدیدی با روش تولید و ابعاد فنر دارد. نتایج تجربی برای پنج نوع متداول از مفتولهای فنری نشان می دهد که کمترین استحکام کششی با قطر مفتول مطابق رابطه زیر تغییر می کند:

$$\sigma_{ut} = A/d^b$$

Material	ASTM Specification	Size range		Exponent, M	Constant, A	
		in.	mm		psi	Mpa
Music wire ^a	A228	0.01-0.25	0.3-6	0.1625	184649	2153.5
Oil-tempered wire ^b	A229	0.02-0.625	0.5-12	0.1833	146780	1831.2
Cold-drawn wire ^c	A227	0.02-0.625	0.5-12	0.1822	141040	1753.3
Chromium vanadium ^d	A232	0.02-0.5	0.5-12	0.1453	173128	1909.9
Chromium silicone ^e	A401	0.031-0.437	0.8-11	0.0934	220779	2059.2

^aSurface is smooth and free from defects and has a bright, lustrous finish.

^bSurface has a slight heat-treating scale that must be removed before plating.

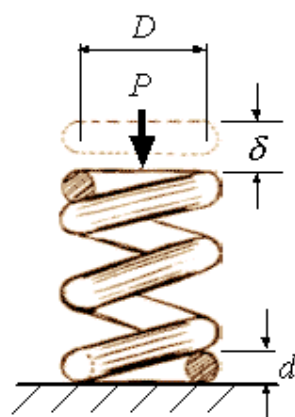
^cSurface is smooth and bright with no visible marks.

^dAircraft-quality tempered wire; can also be obtained annealed.

^eTempered to Rockwell C49 but may also be obtained untempered.

♦ فنرهای مارپیچ فشاری:

فنر مارپیچ از یک مفتول با قطر ثابت که با گام ثابت در مسیری حول استوانه ای با قطر ثابت پیچیده شده است تشکیل می شود.



P : گام (Pitch) فاصله دو حلقه مجاور در راستای محور

مارپیچ

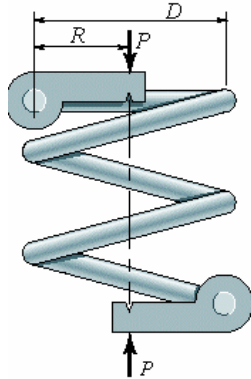
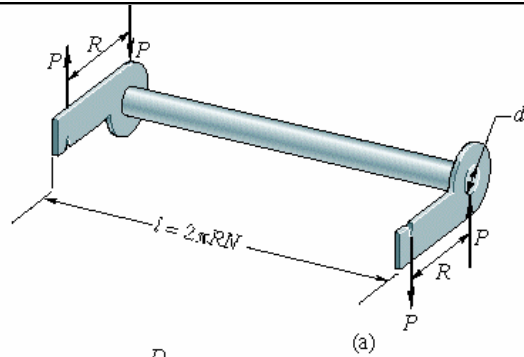
d : قطر مفتول

D : قطر متوسط مارپیچ

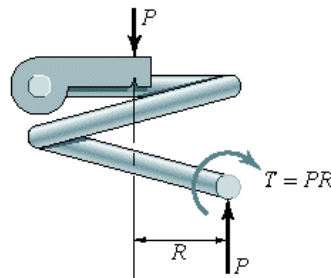
P : نیروی فشاری

$C = D/d$: شاخص فنر

تحت شرایط نشان داده شده، تنش های برشی بیشینه در مقطع مفتول به صورت زیر می باشند:



(b)



(c)

Torsional shearing stress :

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} = \frac{PR \cdot \frac{d}{2}}{\frac{\pi}{32} d^4} = \frac{8PD}{\pi d^3}$$

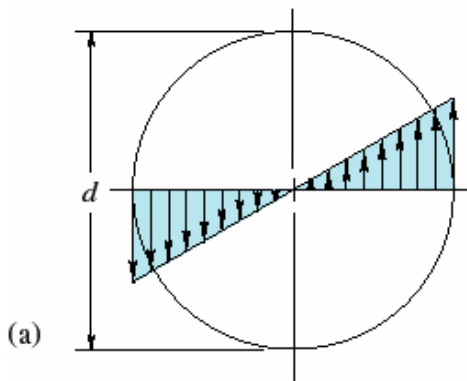
Transverse shearing stress :

$$\tau_{\max} = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

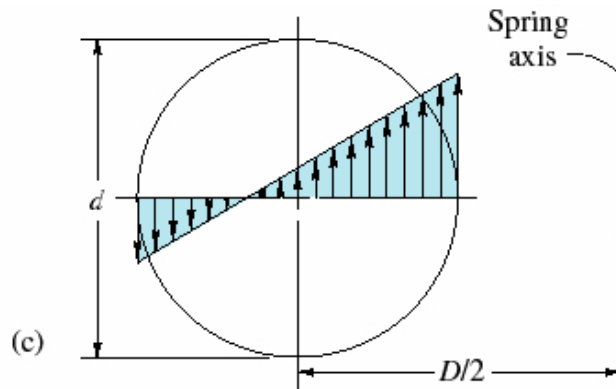
Combined shear stress :

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} \\ &= \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D} \right) \\ &= \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{0.5}{C} \right) = K_s \frac{8PD}{\pi d^3} \end{aligned}$$

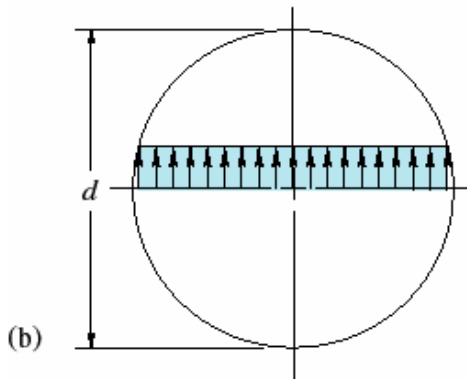
K_s : ضریب تصحیح تنش برشی



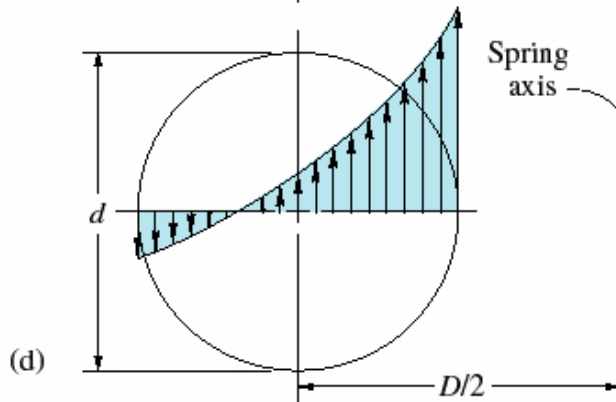
(a)



(c)



(b)



(d)

معادله توزیع تنش برشی بدون توجه به انحنای مفتول بدست آمده است. با در نظر گرفتن اثرات تمرکز تنش در لبه داخلی مارپیچ، این معادله را می توان به صورت زیر اصلاح نمود:

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(\frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C} \right) = K_w \frac{8PD}{\pi d^3}$$

▪ جابجایی فنر:

جابجایی فنر به کمک تحلیل پیچش مفتول تحت ترکی $T = P.R$ بدست می آید. کرنش برشی در اثر پیچش عبارت است از:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= Tl/JG \\ \delta &= R\theta = \theta.D/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta = \frac{D}{2} \frac{Tl}{JG}$$

با فرض اینکه مفتول دارای مقطع دایره است خواهیم داشت:

$$\delta = \left(\frac{D}{2} \right) \frac{\left(P \cdot \frac{D}{2} \right) \cdot (\pi D \cdot N_a)}{\frac{\pi}{32} d^4 G} = \frac{8PC^3 N_a}{Gd} = \frac{8PD^3 N_a}{Gd^4}$$

که N_a تعداد حلقه های فعال در فنر می باشند. در رابطه فوق فقط جابجایی در اثر پیچش مفتول لحاظ شده است. به کمک قضیه کاستیلیانو برای ترکیب تنش های برشی پیچشی و جانبی خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{8PC^3 N_a}{Gd} \left(1 + \frac{0.5}{C^2} \right)$$

با توجه به اینکه در اغلب موارد متداول $3 \leq C \leq 12$ می باشد مشاهده می شود که اثرات تنش برشی جانبی تاثیر جدی در میزان جابجایی فنر ندارد.

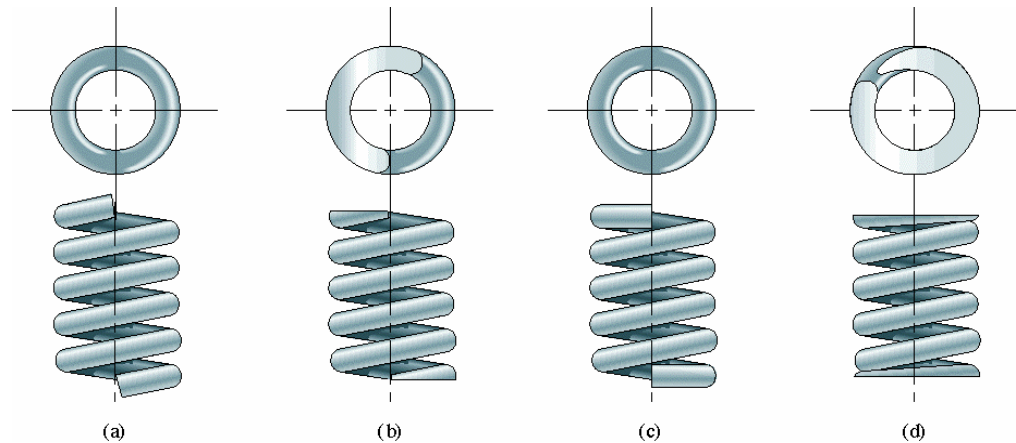
▪ سفتی فنر:

سختی فنر معادل نیروی لازم برای جابجایی واحد در فنر است:

$$K = \frac{P}{\delta} = \frac{Gd}{8C^3 N_a} = \frac{Gd^4}{8D^3 N_a}$$

▪ شرایط انتهای فنرهای فشاری:

برای کاهش اثرات بارگذاری خارج از محور، معمولاً تغییراتی در طرفین فنر ایجاد می شود.

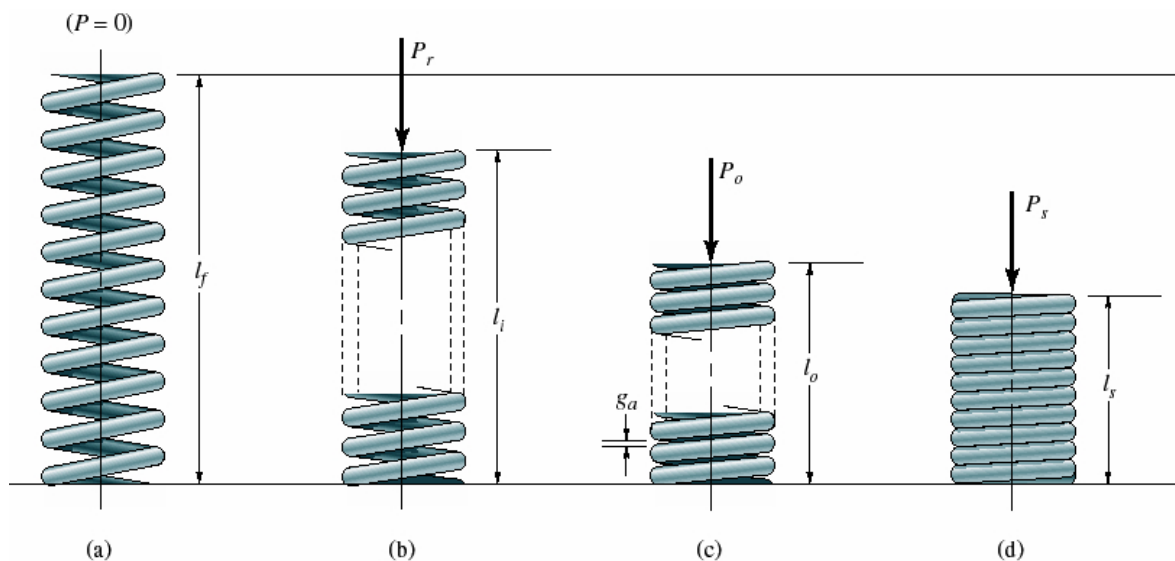


Four end types commonly used in compression springs.

(a) Plain; (b) plain and ground; (c) squared; (d) squared and ground

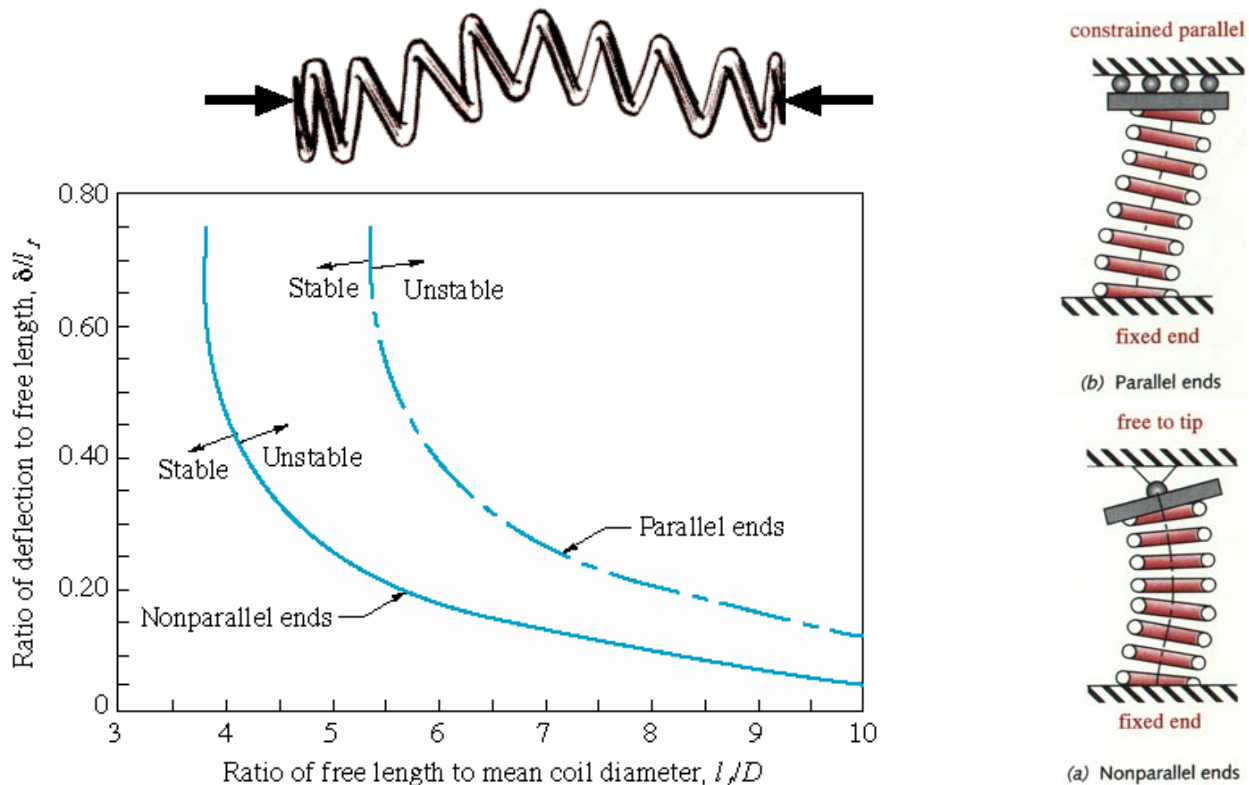
اثر شکل انتها باعث تغییر تعداد حلقه های فعال فنر در بارگذاری فشاری می شود. در جدول زیر روابط مفیدی برای فنرهای فشاری داده شده است.

Term	Type of spring end			
	Plain	Plain and ground	Squared or closed	Squared and ground
Number of end coils, N_e	0	1	2	2
Total number of coils, N_t	N_a	N_a+1	N_a+2	N_a+2
Free length, l_f	pN_a+d	$p(N_a+1)$	pN_a+3d	pN_a+2d
Solid length, l_s	$d(N_t+1)$	dN_t	$d(N_t+1)$	dN_t
pitch, p	$(l_f-d)/N_a$	$l_f/(N_a+1)$	$(l_f-3d)/N_a$	$(l_f-2d)/N_a$



♦ کمانش فنرهای فشاری:

در طراحی فنرهای فشاری ضروری است ارتفاع فنر در محدوده ای قرار گیرد که امکان وقوع کمانش منتفی گردد. در نمودار زیر، مرز شرایطی که ناپایداری رخ می دهد نشان داده شده است.



♦ خستگی در فنرهای فشاری:

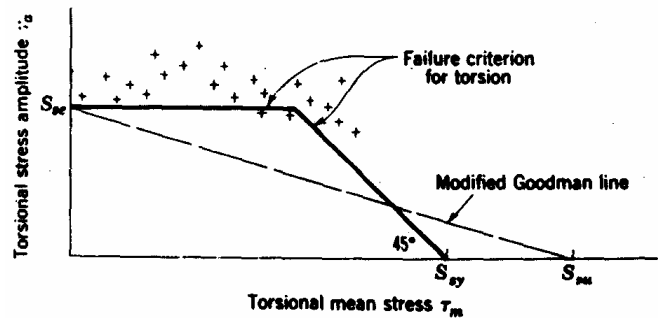
در بسیاری از موارد، فنر تحت بارگذاری نوسانی قرار می گیرد. بنابراین ضروری است در طراحی فنر، تحلیل خستگی مورد توجه قرار گیرد. در این راستا توجه به موارد زیر مهم است:

- ❖ فنرهای مارپیچ هرگز تحت بارگذاری نوسانی با کشش و فشار متوالی قرار نمی گیرند.
- ❖ در اغلب موارد کاربردی فنرها تحت بار اولیه غیر صفر مونتاز می شوند.
- ❖ شکست خستگی عمدتاً ناشی از رشد ترک از عیوب سطحی فنر است.
- ❖ فوردهی در سطح فنر استهکام خستگی را شدیداً کاهش می دهد.
- ❖ عملیات سطحی shot peening برای افزایش عمر خستگی متداول است.
- ❖ در دماهای بالاتر از 180°C ، بارهای خیلی کم نیز باعث خزش در فنرهای فولادی می شود.
- ❖ در دماهای بالا یا پایین استفاده از فولادهای آلایژی الزامی است.

■ تحلیل بارگذاری نوسانی در فترهای فشاری:

$$\left. \begin{aligned} P_a &= \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2} \\ P_m &= \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \tau_a = K_w \frac{8P_a D}{\pi d^3} \\ \tau_m = K_w \frac{8P_m D}{\pi d^3} \end{cases}$$

نتایج تجربی نشان می دهد که تغییرات τ_m روی مقدار τ_e (حد دوام برشی اصلاح شده) تأثیر قابل توجهی ندارد. بنابراین می توان معیار گسستگی خستگی را به صورت زیر بیان کرد:



■ تنش مجاز فستگی :

$$\tau_{all} = \tau_a \leq \frac{\tau_e}{FS}$$

■ تنش مجاز در بارگذاری استاتیکی :

$$\tau_{all} = \tau_a + \tau_m \leq \frac{\tau_{yp}}{FS}$$

■ تنش مجاز فستگی با عمر محدود :

$$\tau_{ut} = \tau_a \leq \frac{\tau_f}{FS}$$

بر اساس نتایج Zimmerli [1957] بهترین مقادیر برای حد دوام برشی τ'_e عبارت است از :

$$\tau'_e = 310 \text{ Mpa} \quad \text{for unpeened springs}$$

$$\tau'_e = 465 \text{ Mpa} \quad \text{for peened springs}$$

مقادیر فوق بر اساس اثرات پرداخت سطح (k_f) و اثرات اندازه (k_s) اصلاح شده است. بنابراین :

$$\tau_e = k_r \cdot k_t \cdot k_m \tau'_e$$

♦ ارتعاشات یا سرچ در فنرهای مارپیچ :

تغییر شکل ناگهانی در یک انتهای فنر، باعث ایجاد یک موج فشاری متحرک در فنر می شود که پس از برخورد به انتهای دیگر انعکاس می یابد. این فرآیند باعث ایجاد تنش های متغیر می شود که با فرکانس طبیعی فنر تغییر می کند:

$$f = \frac{2}{\pi N_a} \frac{d}{D^2} \sqrt{\frac{Gg}{32\rho}}$$

شتاب جاذبه : $g \text{ (m/sec}^2\text{)}$

دانسیته : $\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$

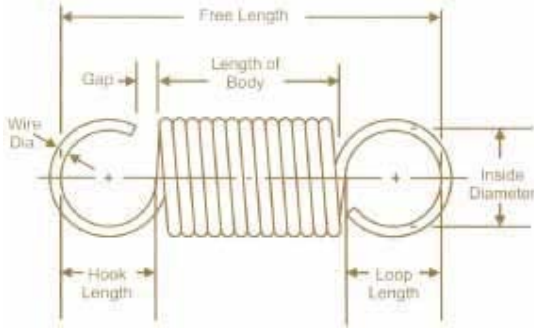
مدول برشی : $G \text{ (Pa)}$

کوچکترین فرکانس طبیعی فنر : $f \text{ (Hz)}$

ارتعاشات فنر می تواند با فرکانس های $f, 2f, 3f, \dots$ رخ دهد. بنابراین برای جلوگیری از رزونانس باید فرکانس بارگذاری بسیار کوچکتر از فرکانس طبیعی فنر باشد.

	♦ فنرهای مارپیچ گشتشی : حلقه های طرفین فنرهای فشاری برای اعمال بار گشتشی باید به گونه ای اصلاح شوند که تا حد امکان اثرات تمرکز تنش کاهش یابد. ❖ افزایش شعاع انحنای خمیدگی در نقطه B باعث کاهش تمرکز تنش می شود. ❖ کاهش تدریجی شعاع فنر باعث کاهش مقدار تنش در اثر کوچک شدن بازوی گشتاور می شود.
--	---

فنر ها

	▪ سفتی فنر : N_a : تعداد حلقه های فعال N_t : تعداد حلقه های کل $N_t = N_a + 1$ $l_b = d \cdot N_t$
---	--

فرآیند تولید فنرهای مارپیچ کششی به گونه ای است که معمولاً در اثر پیش تنیدگی، حلقه ها به یکدیگر چسبیده اند. بنابراین پس از گذر بار خارجی از مقدار مشخصی جابجایی در فنر مشاهده می شود:

$$P = P_i + \frac{\delta G d^4}{8 N_a D^3} = P_i + \frac{\delta G d}{8 N_a C^3}$$

$$K = \frac{P - P_i}{\delta} = \frac{d^4 G}{8 N_a D^3} = \frac{d G}{8 N_a C^3}$$

▪ **تنش برشی در بارگذاری استاتیکی :**

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{0.5}{C} \right)$$

▪ **تنش برشی در بارگذاری دینامیکی :**

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(\frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0.615}{C} \right)$$

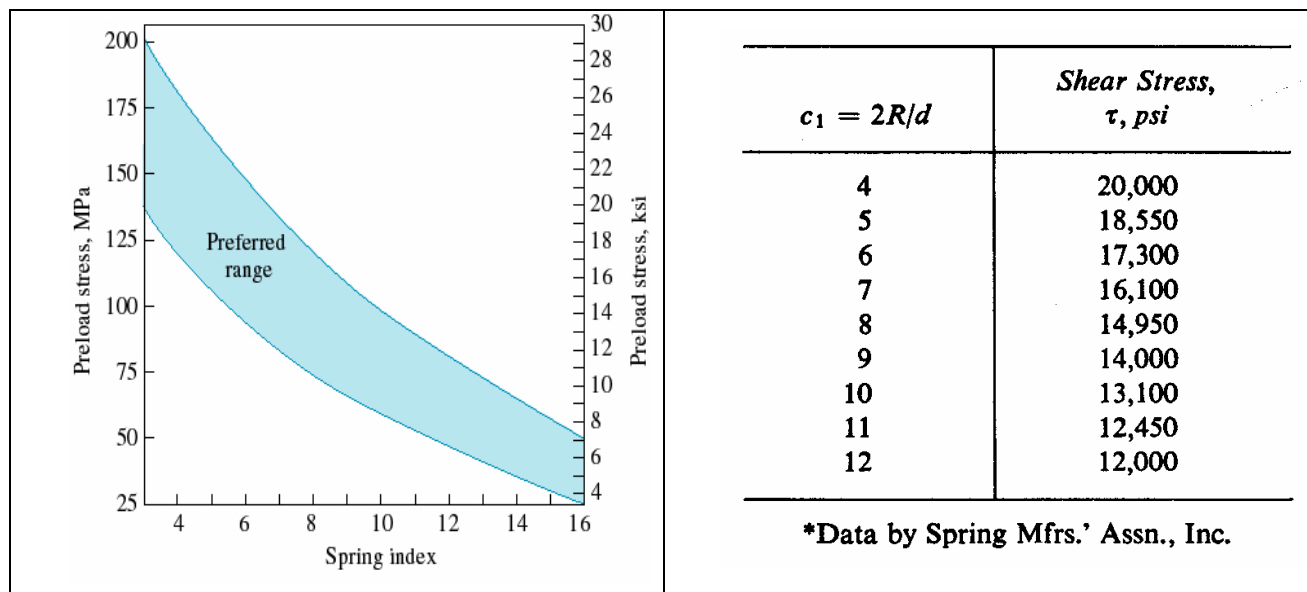
▪ **تنش برشی در اثر پیش تنیدگی :**

میزان تنش برشی ایجاد شده در فرآیند تولید ماشینهای فنرپیچی استاندارد به صورت زیر است.

$$P_i = \frac{\pi d^3 \tau_i}{8D} = \frac{\pi d^2 \tau_i}{8C}$$

$$\tau_i = \frac{8P_i D}{\pi d^3} = \frac{8P_i C}{\pi d^2}$$

مقادیر τ_i بستگی به اندیس فنر دارد.



▪ تحلیل تنش پنگه های فنر کششی :

تنش های بحرانی در نقاط B, A مشاهده می شوند. در نقطه A تنش های نرمال عبارتند از :

$$\sigma_A = \left(\frac{Mc}{I} \right) \left(\frac{r_1}{r_3} \right) + \frac{P}{A} = \left(\frac{32P.r_1}{\pi d^3} \right) \left(\frac{r_1}{r_3} \right) + \frac{4P}{\pi d^2}$$

$$\sigma_{all} = \sigma_A \leq \frac{\sigma_{yp}}{FS}$$

در نقطه B تنش های برشی عبارتند از :

$$\tau_B = \frac{8PC}{\pi d^2} \left(\frac{r_2}{r_4} \right)$$

$$\sigma_{all} = \tau_B \leq \frac{\tau_{yp}}{FS}$$

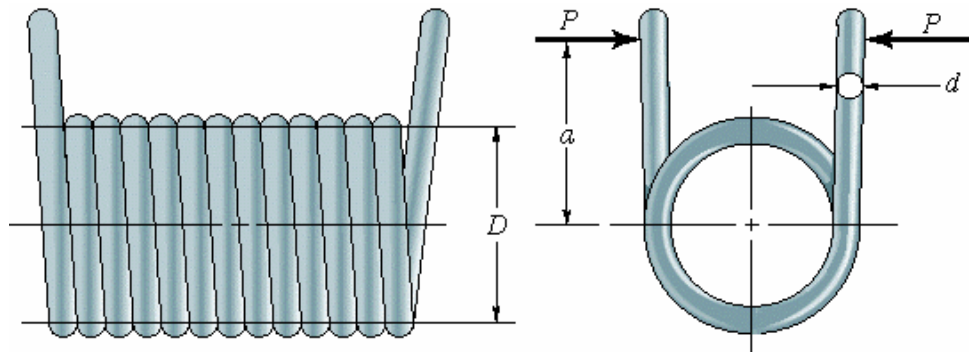
تنش مجاز بر اساس نوع بارگذاری (استاتیکی یا دینامیکی) مبنای طراحی قرار می گیرد و مقادیر

τ_{yp} مطابق جدول زیر است.

Type	τ_{yp} / σ_{ut}
Cold – drawn wire	0.42
Music wire	0.4
Oil - tempered wire	0.45
Chromium Vanadium	0.51
Chromium Silicon	0.51

♦ فنرهای مارپیچ پیچشی :

فنرهای مارپیچ پیچشی تحت اثر ترک حول محور فنر قرار دارند که این ترک به عنوان گشتاور خمشی روی هر مقطع مفتول عمل می کند. با توجه به خمیدگی فنر، تنش در ناحیه میانی فنر از ناحیه بیرونی آن بیشتر است. تنش ماکزیمم خمشی در ناحیه میانی عبارت است از :



$$M = Pa$$

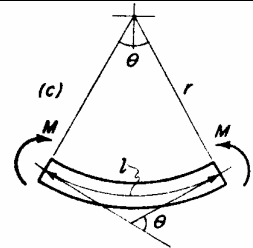
$$K_i = \frac{4C^2 - C - 1}{4C(C - 1)}$$

$$\sigma = K_i \frac{Mc}{I} = K_i \frac{32M}{\pi d^3}$$

▪ تغییر شکل زاویه ای فنر :

$$\theta_{rad} = \frac{Ml}{EI} = \frac{\pi DN_a M}{EI} \quad (\text{radian})$$

$$\theta_{rev} = \frac{32MDN_a}{\pi Ed^4} \quad (\text{revolutions})$$



▪ سفتی پیچشی فنر :

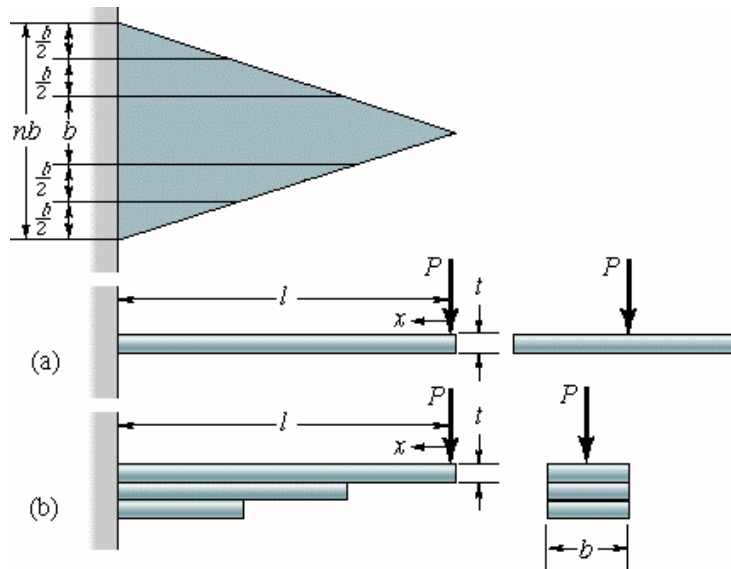
$$K_\theta = \frac{M}{\theta_{rev}} = \frac{\pi Ed^4}{32DN_a}$$

هنگامی که فنر پیچشی تحت بار قرار می گیرد قطر داخلی آن کاهش می یابد :

$$D'_i = \frac{N_a D_i}{N'_a}$$

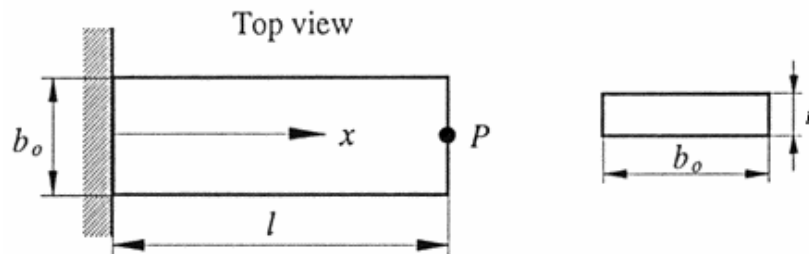
که در رابطه فوق N'_a تعداد حلقه های فعال فنر تحت بار و D'_i قطر داخلی فنر است.

♦ فنر شمش :



تحلیل دقیق فنرهای شمش بسیار پیچیده است اما تحلیل تقریبی فنرهای شمش چند لایه مشابه تحلیل تیرهای یک سر درگیر انجام می شود. با فرض امکان لغزش بدون اصطکاک بین لایه های فنر و بارگذاری یک جهته مطابق شکل، می توان فنر را معادل یک تیر مثلی یک سر درگیر تحلیل نمود.

▪ فنر شمش یک لایه :



$$\sigma = \frac{Mc}{I_o} = \frac{6Px}{bt^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\max} = \frac{6Pl}{bt^2} \\ \delta_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI_o} = \frac{4Pl^3}{Ebt^3} \end{cases}$$

مطابق روابط فوق تنش در طول فنر متغیر است.

▪ فنر شمش چند لایه :

به عنوان یک معیار طراحی، پهنای b را می توان به گونه ای تغییر داد که در کلیه مقاطع، مقدار تنش σ ثابت باقی بماند :

$$\sigma = \frac{6P}{t^2} \frac{x}{b} = \text{Const} \Rightarrow \frac{x}{b} = \text{Const}$$

معادله خطی فوق بیانگر یک فنر مثلی می باشد که معادل یک فنر شمش چند لایه خواهد بود.

▪ سفتی و جابجایی فنر شمش :

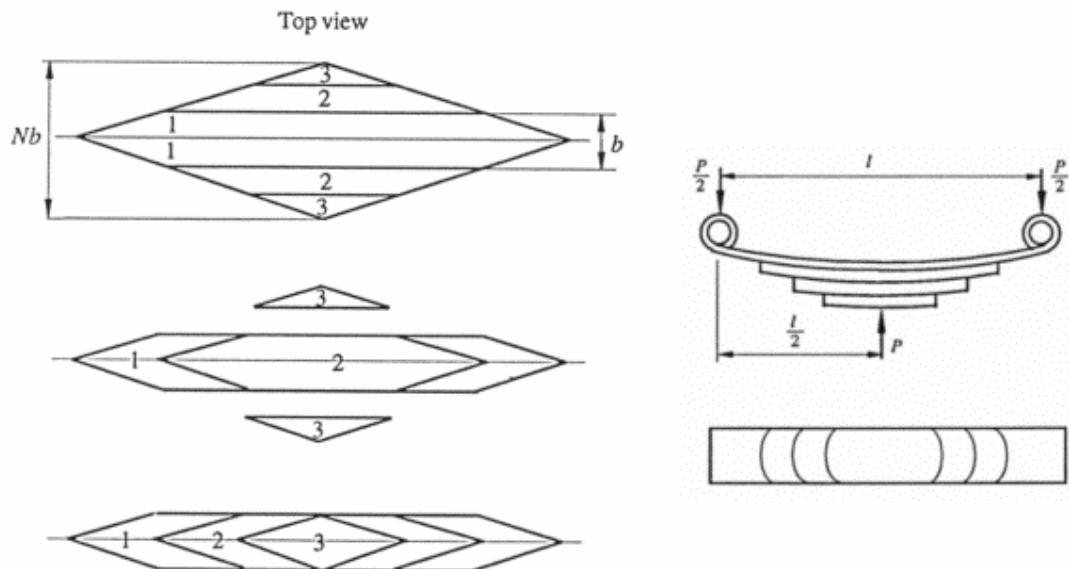
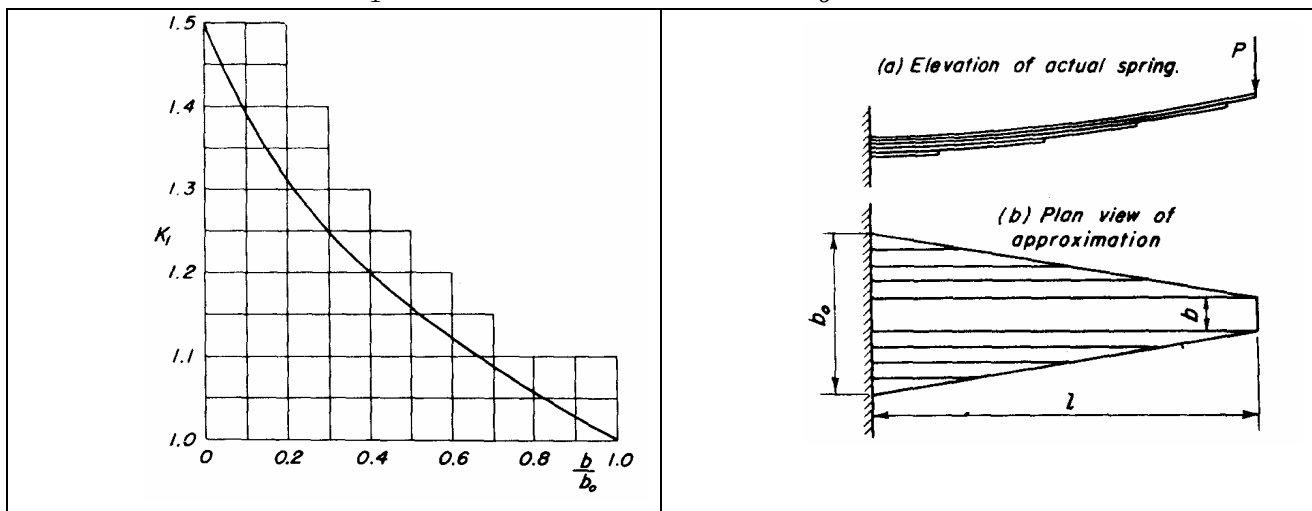
$$\delta = \frac{6Pl^3}{Enbt^3}$$

$$K = \frac{Enbt^3}{6l^3}$$

در صورتی به جای مدل مثلثی از مدل دوزنقه ای استفاده شود از روابط زیر استفاده می شود.

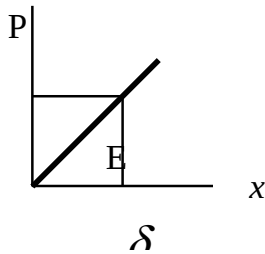
$$K = \frac{P}{\delta} = \frac{Ebt^3}{4l^3 K_1}$$

$$\delta = K_1 \frac{Pl^3}{3EI_o} = K_1 \frac{4Pl^3}{Ebt^3}$$



♦ انرژی ذخیره شده در فنرها :

در بسیاری موارد فنرها به عنوان ذخیره کننده انرژی و یا جاذب انرژی در بارهای ضربه ای بکار می روند. در حالتی که نیرو و جابجایی متناسب باشند می توان نوشت :



$$P = K\delta \Rightarrow E = \frac{1}{2}P\delta$$

▪ انرژی کرنشی در فنرهای مارپیچ :

$$\begin{aligned} E &= \frac{P}{2}\delta = \frac{P}{2} \times \frac{8PC^3N_a}{Gd} \\ &= \frac{P}{2} \times \frac{8PD^3N_a}{Gd^4} = \frac{1}{4G} \frac{64P^2D^2}{\pi^2d^6} \frac{\pi d^2N_aD}{4} \\ &= \frac{1}{4G} \times (\text{Torsional shearing stress})^2 \times \text{volume} \end{aligned}$$

بنابراین برای هر تنش برشی خاص، انرژی ذخیره شده با حجم فنر متناسب و با مدول برشی فنر تناسب مکعوس دارد.

▪ انرژی کرنشی در فنرهای مارپیچ پیچشی :

$$\left. \begin{aligned} E &= \theta M / 2 \\ M &= \sigma I / c \\ \theta &= Ml / EI \end{aligned} \right\} \Rightarrow E = \frac{\sigma^2}{8E} \times \text{volume}$$

▪ انرژی کرنشی در فنرهای شمش یک لایه :

$$E = \frac{\sigma^2}{16E} \times \text{volume}$$

▪ انرژی کرنشی در فنرهای شمش چند لایه (مدل مثلثی) :

$$E = \frac{\sigma^2}{6E} \times \text{volume}$$

رابطه فوق بیانگر ذخیره سازی دانسیته بیشتر انرژی در فنر شمش چند لایه است.