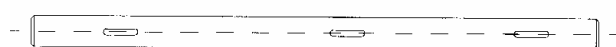
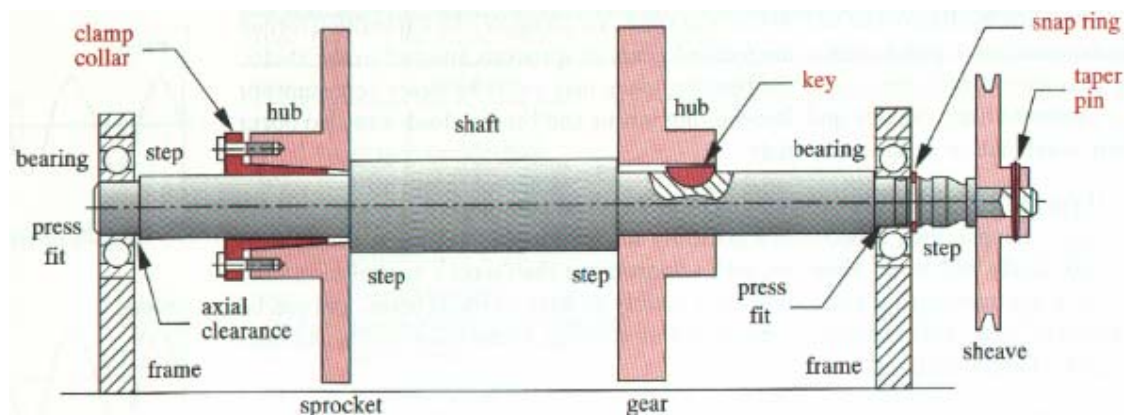
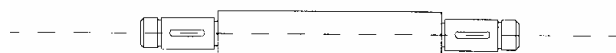


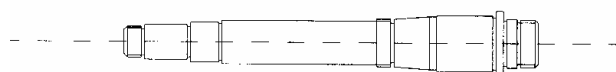
محور، قطعه ای است ثابت یا چرخان، با مقطع استوانه ای (معمولا) که طول آن نسبت به قطرش بسیار بزرگتر است و برای انتقال قدرت، حرکت یا نیرو در یک ماشین بکار می رود.



Plain transmission



Stepped shaft



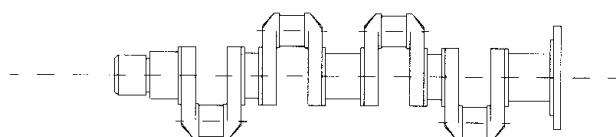
Machine tool spindle



Railway rotating axle



Non-rotating truck axle



Crankshaft

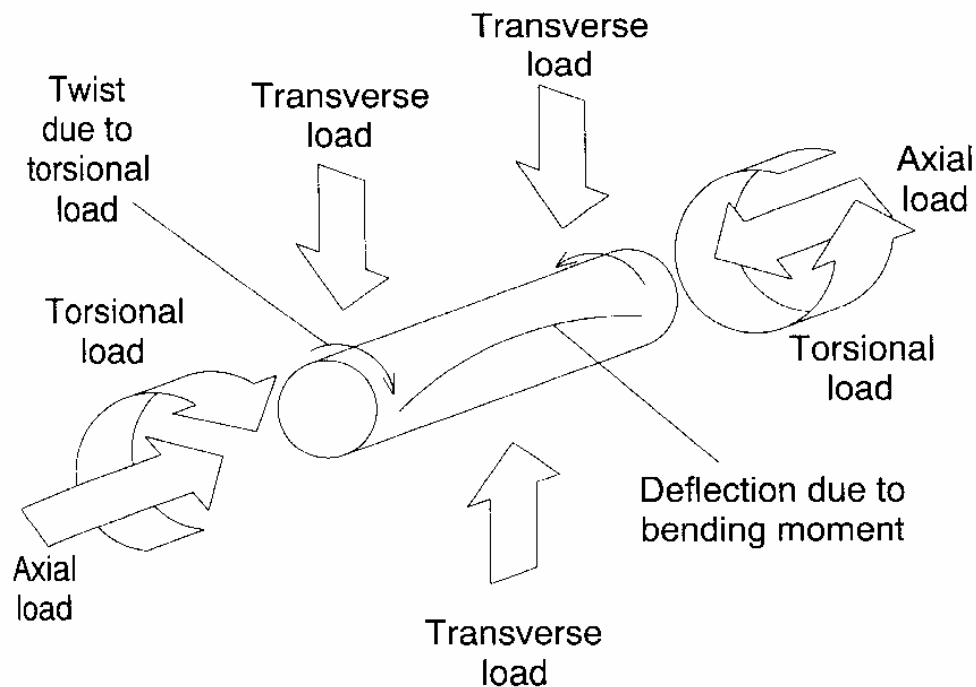
طراحی محورها:

الزامات طراحی محورها عبارت است از:

- ❖ تعیین اندازه، تلورانس ها و محل نصب اجزا
- ❖ انتخاب مصالح و تعیین فرآیند ساخت
- ❖ بررسی میزان صلبیت و تغییر مکانها
- ❖ آنالیز تنش و بررسی استحکام مکانیکی
- ❖ بررسی رفتار دینامیکی و پاسخ فرکانسی

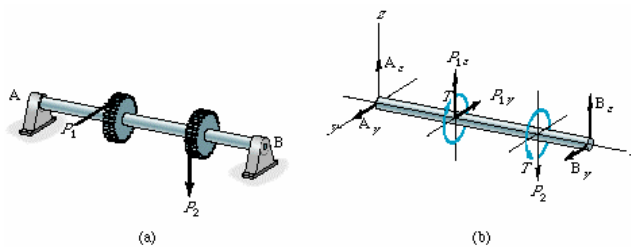
▪ بارگذاری محورها:

در حالت کلی، محورها تحت تاثیر بارهای ترکیبی (خمشی، محوری و پیچشی) می باشند.



▪ طراحی محورها در بارگذاری آرام: بارگذاری خمشی و پیچشی

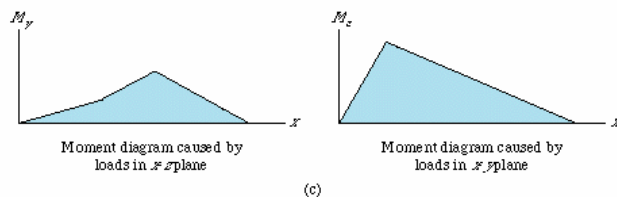
▪ رسم نمودار آزاد لنگر خمشی و تری



$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

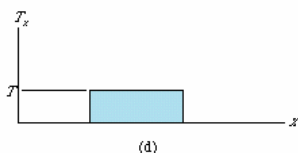
تنش بیشینه نرمال (مقطع مدور):

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3}$$

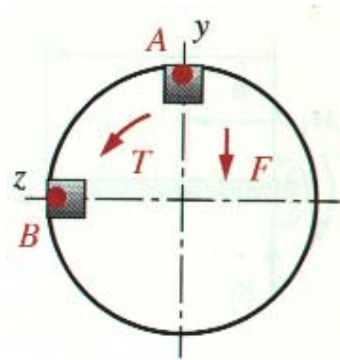


تنش بیشینه برشی (مقطع مدور):

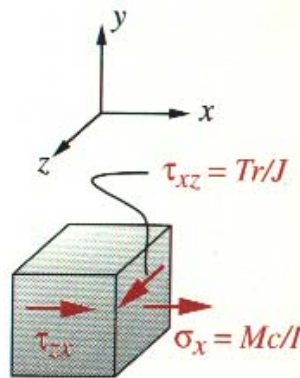
$$\tau_{xy} = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3}$$



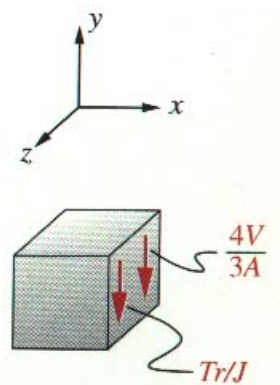
برای یک المان در پوسته خارجی محور، تنش های اصلی عبارتند از:



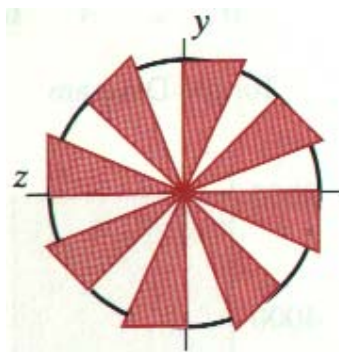
(a) Two points of interest for stress calculations



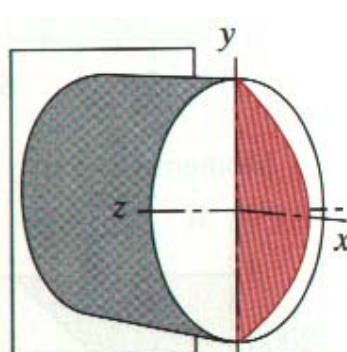
(b) Stress element at point A



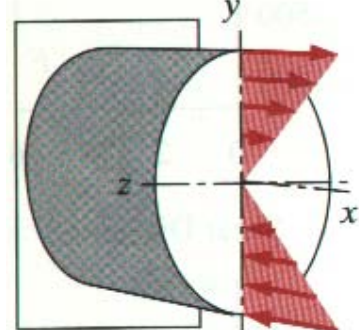
(c) Stress element at point B



(c) Torsional shear-stress distribution across section



(b) Transverse shear-stress distribution across section



(a) Bending normal-stress distribution across section

برای توزیع تنش صفحه ای (plane stress):

$$\sigma_y = 0 \Rightarrow \sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{16M}{\pi d^3} \pm \sqrt{\left(\frac{16M}{\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2} = \frac{16}{\pi d^3} \left[M \pm \sqrt{M^2 + T^2} \right]$$

$$\tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2} = \pm \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2}$$

- تنش مجاز بر اساس معیار فان میسر:

$$\sigma_{all} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \frac{\sigma_{yp}}{Fs} \Rightarrow \sigma_{all} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{4M^2 + 3T^2} = \frac{\sigma_{yp}}{Fs}$$

- کمترین قطر مجاز بر اساس معیار فان میسر:

$$d = \left[\frac{32Fs}{\pi \sigma_{yp}} \sqrt{M^2 + \frac{3}{4}T^2} \right]^{1/3}$$

- ضریب اطمینان بر اساس معیار فان میسر:

$$Fs = \frac{\pi d^3 \sigma_{yp}}{32 \sqrt{M^2 + \frac{3}{4}T^2}}$$

- تنش مجاز بر اساس معیار ترسکا:

$$\tau_{max} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_x}{2} \right)^2} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{all} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2} = \frac{0.5\sigma_{yp}}{Fs} \\ \sigma_{all} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2} = \frac{\sigma_{yp}}{Fs} \end{cases}$$

- کمترین قطر مجاز بر اساس معیار ترسکا:

$$d = \left[\frac{32Fs}{\pi \sigma_{yp}} \sqrt{M^2 + T^2} \right]^{1/3}$$

- ضریب اطمینان بر اساس معیار ترسکا:

$$Fs = \frac{\pi d^3 \sigma_{yp}}{32 \sqrt{M^2 + T^2}}$$

- طراحی محورها در بارگذاری آرام: بارگذاری خمشی، پیچشی و محوری:

$$\sigma_x = \frac{32M}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} : \quad \text{تنش بیشینه نرمال (مقطع مدور)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad \text{تنش بیشینه برشی (مقطع مدور):}$$

تنش های اصلی برای یک المان در پوسته خارجی محورها برای توزیع تنش صفحه ای عبارتند از:

$$\sigma_y = 0 \Rightarrow \sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{2}{\pi d^3} \left[8M + Pd \pm \sqrt{(8M + Pd)^2 + (8T)^2} \right]$$

$$\tau_1, \tau_2 = \pm \frac{2}{\pi d^3} \sqrt{(8M + Pd)^2 + (8T)^2}$$

▪ تنش مجاز بر اساس معیار فان میسر:

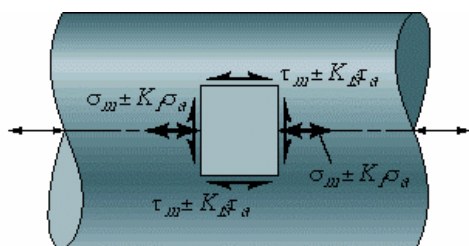
$$\sigma_{all} = \frac{4}{\pi d^3} \sqrt{(8M + Pd)^2 + 48T^2} = \frac{\sigma_{yp}}{F_s}$$

▪ تنش مجاز بر اساس معیار ترسکا:

$$\sigma_{all} = \frac{4}{\pi d^3} \sqrt{(8M + Pd)^2 + 64T^2} = \frac{\sigma_{yp}}{F_s}$$

$$\tau_{all} = \frac{2}{\pi d^3} \sqrt{(8M + Pd)^2 + 64T^2} = \frac{0.5\sigma_{yp}}{F_s}$$

▪ طراحی محورها در بارگذاری دینامیکی:



(a)

تنش های متوسط : σ_m و τ_m

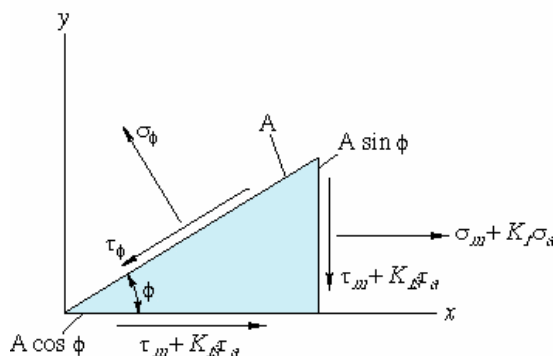
تنش های نوسانی : σ_a و τ_a

K_f : ضریب تمرکز تنش خستگی برای

تنش های نرمال

K_{fs} : ضریب تمرکز تنش خستگی برای

تنش های برشی



(b)

برآیند نیروها در راستای سطح مورب با فرض همفاز بودن σ_a و τ_a :

$$\tau_\phi = (\tau_m + K_{fs}\tau_a) \cos 2\phi + \frac{1}{2}(\sigma_m + K_f\sigma_a) \sin 2\phi$$

$$\tau_\phi = \tau_{\phi m} + \tau_{\phi a} = \left(\frac{\sigma_m}{2} \sin 2\phi + \tau_m \cos 2\phi \right) + \left(\frac{K_f\sigma_a}{2} \sin 2\phi + K_{fs}\tau_a \cos 2\phi \right)$$

▪ تنش مجاز بر مبنای خط سودربرگ:

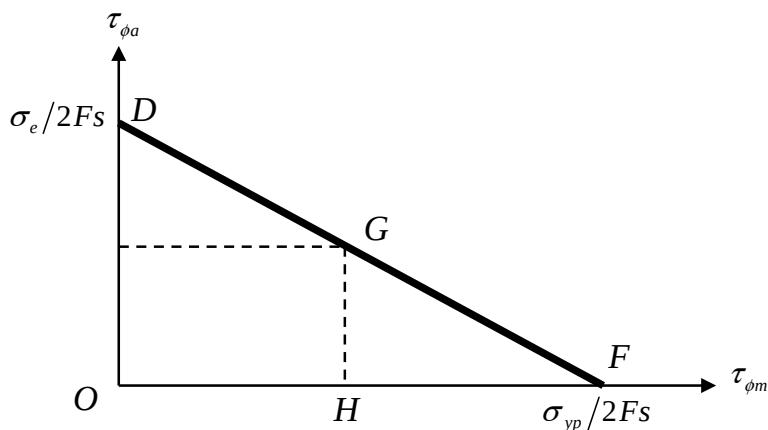
خط سودربرگ براساس تنش برشی و ضریب اطمینان Fs مرز گسیختگی را اینگونه نشان می دهد:

$$\frac{HF}{OF} = \frac{HG}{OD} \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_{yp}/2Fs - \tau_{\phi m}}{\sigma_{yp}/2Fs} = \frac{\tau_{\phi a}}{\sigma_e/2Fs}$$

$$\frac{1}{Fs} = \frac{\tau_{\phi a}}{\sigma_e/2} + \frac{\tau_{\phi m}}{\sigma_{yp}/2}$$

$$= \tilde{A} \sin(2\phi) + 2\tilde{B} \cos(2\phi)$$



$$\tilde{A} = \frac{\sigma_m}{\sigma_{yp}} + \frac{K_f\sigma_a}{\sigma_e}$$

$$\tilde{B} = \frac{\tau_m}{\sigma_{yp}} + \frac{K_{fs}\tau_a}{\sigma_e}$$

ترکیب تنش ها در فاز خاصی کمترین ضریب اطمینان را نشان می دهد:

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{Fs} \right) = 2\tilde{A} \cos 2\phi - 4\tilde{B} \sin 2\phi = 0 \Rightarrow \tan 2\phi = \frac{\tilde{A}}{2\tilde{B}}$$

تحت شرایط فوق:

$$\frac{1}{Fs} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{yp}} + \frac{K_f\sigma_a}{\sigma_e} \right)^2 + 4 \left(\frac{\tau_m}{\sigma_{yp}} + \frac{K_{fs}\tau_a}{\sigma_e} \right)^2}$$

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_{yp}}{Fs} = \sqrt{\left(\sigma_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_f \sigma_a \right)^2 + 4 \left(\tau_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_{fs} \tau_a \right)^2}$$

▪ تنش مجاز در بارگذاری دینامیکی بر اساس معیار $MSST$ و خط سودربرگ:

▪ (Westinghouse code formula):

در حالت تنش های صفحه ای :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_y = 0 \\ \sigma_x = \sigma \\ \tau_{xy} = \tau \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau_{all} = \tau_{max} = \frac{0.5\sigma_{yp}}{Fs} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma_{all} = \frac{\sigma_{yp}}{Fs} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{array} \right.$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sigma_{xm} &= \frac{32M_m}{\pi d^3} & \sigma_{xa} &= K_f \frac{32M_a}{\pi d^3} & \tau_{xym} &= \frac{16T_m}{\pi d^3} & \tau_{xya} &= K_{fs} \frac{16T_a}{\pi d^3} \\ \left. \begin{array}{l} \sigma = \sigma_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_f \sigma_a \\ \tau = \tau_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_{fs} \tau_a \end{array} \right\} & \Rightarrow \sigma_{all} = \frac{\sigma_{yp}}{Fs} = \sqrt{\left(\sigma_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_f \sigma_a\right)^2 + 4\left(\tau_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_{fs} \tau_a\right)^2} \end{aligned}$$

▪ ضریب اطمینان بر اساس معیار $MSST$:

$$Fs = \frac{\pi d^3 \sigma_{yp}}{32 \sqrt{\left(M_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_f M_a\right)^2 + \left(T_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_{yp}} K_{fs} T_a\right)^2}}$$

▪ کمترین قطر بر اساس معیار $MSST$:

$$d = \left[\frac{32Fs}{\pi \sigma_{yp}} \sqrt{\left(M_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_f M_a\right)^2 + \left(T_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_{fs} T_a\right)^2} \right]^{1/3}$$

▪ تنش مجاز در بارگذاری دینامیکی بر اساس معیار DET و خط سودربرگ:

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_{yp}}{Fs} = \sqrt{\left(\sigma_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_f \sigma_a\right)^2 + 3\left(\tau_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_{fs} \tau_a\right)^2}$$

- ضریب اطمینان بر اساس معیار DET :

$$Fs = \frac{\pi d^3 \sigma_{yp}}{32 \sqrt{\left(M_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_f M_a \right)^2 + \frac{3}{4} \left(T_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_{fs} T_a \right)^2}}$$

- کمترین قطر بر اساس معیار DET :

$$d = \left[\frac{32Fs}{\pi \sigma_{yp}} \sqrt{\left(M_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_f M_a \right)^2 + \frac{3}{4} \left(T_m + \frac{\sigma_{yp}}{\sigma_e} K_{fs} T_a \right)^2} \right]^{1/3}$$

- طراحی محورها در بارگذاری دینامیکی-مصلح ترد:

بر اساس معیار MNST و تعمیم آن برای بارگذاری محورها می توان نوشت:

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_{ul}}{Fs} = \frac{K_c}{2} \left(\sigma_m + \frac{\sigma_{ul}}{\sigma_e} \sigma_a \right) + \sqrt{\frac{K_c^2}{4} \left(\sigma_m + \frac{\sigma_{ul}}{\sigma_e} \sigma_a \right)^2 + K_{cs}^2 \left(\tau_m + \frac{\sigma_{ul}}{\sigma_e} \tau_a \right)^2}$$

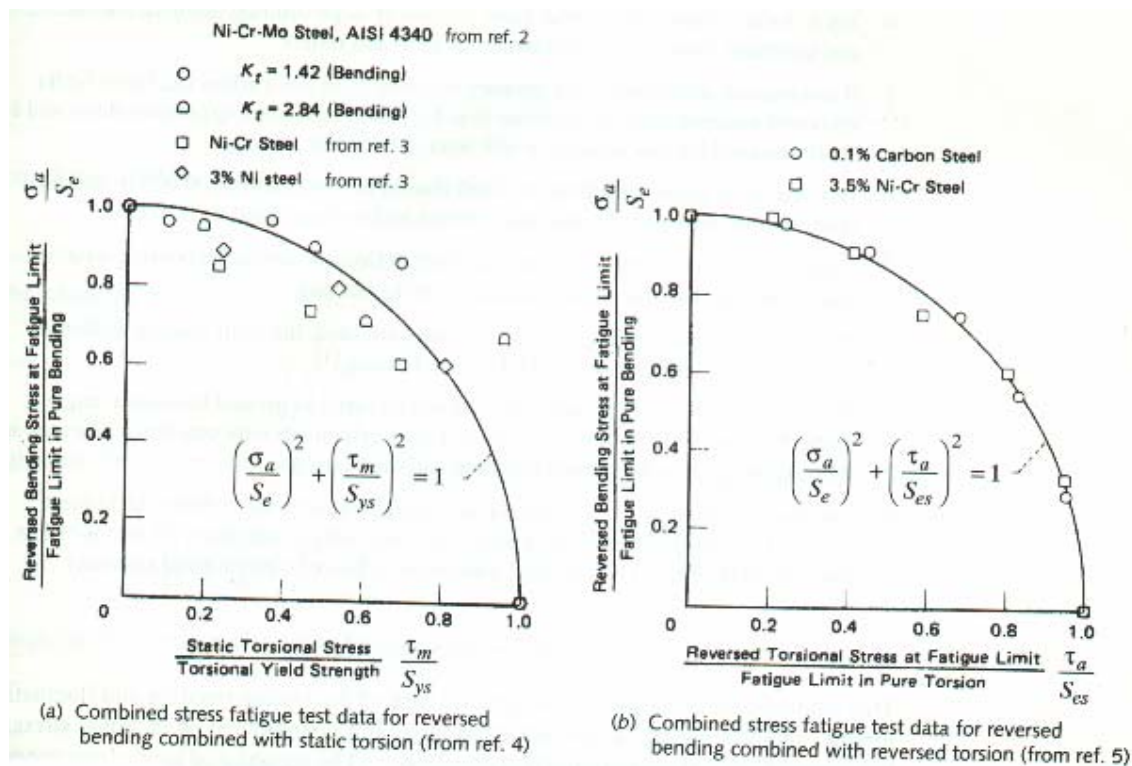
$$Fs = \frac{\pi d^3 \sigma_{ul} / 16}{K_c \left(M_m + \frac{\sigma_{ul}}{\sigma_e} M_a \right) + \sqrt{K_c^2 \left(M_m + \frac{\sigma_{ul}}{\sigma_e} M_a \right)^2 + K_{cs}^2 \left(T_m + \frac{\sigma_{ul}}{\sigma_e} T_a \right)^2}}$$

$$d = \left\{ \frac{16Fs}{\pi \sigma_{ul}} \left[K_c \left(M_m + \frac{\sigma_{ul}}{\sigma_e} M_a \right) + \sqrt{K_c^2 \left(M_m + \frac{\sigma_{ul}}{\sigma_e} M_a \right)^2 + K_{cs}^2 \left(T_m + \frac{\sigma_{ul}}{\sigma_e} T_a \right)^2} \right] \right\}^{1/3}$$

قابل توجه است که در روابط بدست آمده برای مواد ترد K_c ضریب تمرکز تنش استاتیکی و σ_{ul} بکار گرفته شده است در حالیکه برای مواد نرم K_f ضریب تمرکز تنش خستگی و σ_{yp} بکار رفته است.

طراحی محورها بر اساس کد ASME (ANSI/ASME B106.1M-1985)

در این کد، محورها تحت بارگذاری نوسانی با تنش خمشی متوسط صفر ($\sigma_m = 0$) و بارگذاری پیچشی یکنواخت ($\tau_a = 0$) برای عمر محدود طراحی می شوند. این حالت بسیاری از موارد کاربردی را پوشش می دهد. نتایج تجربی نشان می دهد که استحکام خستگی مصالح نرم تحت این بارگذاری به کمک یک مرز بیضوی مشخص می شود:



مطابق شکل a و بر مبنای ضریب اطمینان FS مرز گسیختگی عبارت است از:

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_e}\right)^2 + \left(\frac{\tau_m}{\tau_{yp}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(FS \frac{\sigma_a}{\sigma_e}\right)^2 + \left(FS \frac{\tau_m}{\tau_{yp}}\right)^2 = 1$$

σ_e : bending endurance strength

τ_{yp} : shear yield strength

بر اساس معیار فان میسز برای حالت تنش برشی خالص می توان نوشت:

$$\sigma_{all}^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = 3\tau_{max}^2$$

$$\sigma_{all} = \sigma_{yp} \Rightarrow \tau_{max} = \tau_{yp} = \frac{\sigma_{yp}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(FS \frac{\sigma_a}{\sigma_e}\right)^2 + \left(FS \sqrt{3} \frac{\tau_m}{\sigma_{yp}}\right)^2 = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= K_f \frac{32M_a}{\pi d^3} \\ \tau_m &= \frac{16T_m}{\pi d^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left[\left(K_f \frac{32M_a}{\pi d^3} \right) \left(\frac{Fs}{\sigma_e} \right) \right]^2 + \left[\left(\frac{16T_m}{\pi d^3} \right) \left(\frac{F_s \sqrt{3}}{\sigma_{yp}} \right) \right]^2 &= 1 \\ d &= \left(\frac{32Fs}{\pi} \sqrt{\left(K_f \frac{M_a}{\sigma_e} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{T_m}{\sigma_y} \right)^2} \right)^{1/3} \end{aligned} \right.$$

❖ σ_e : حد دوام که بر اساس شرایط کاربردی و ضرایب تجربی اصلاح شده است.

❖ Fs : ضریب اطمینان بر اساس شرایط بارگذاری و کیفیت مصالح.

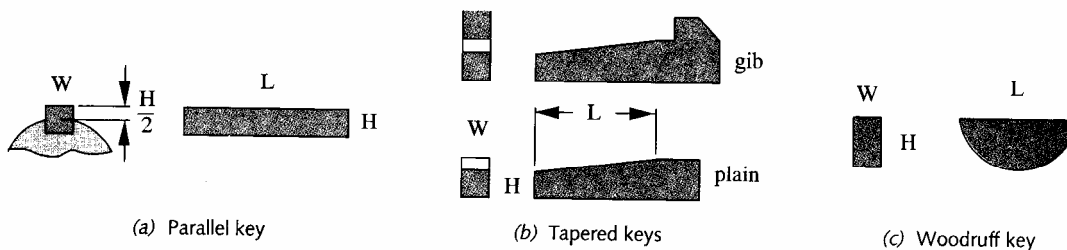
- 1.3-1.5 For use with highly reliable materials where loading and environmental conditions are not severe, and where weight is an important consideration.
- 1.5-2 For applications using reliable materials where loading and environmental conditions are not severe.
- 2-2.5 For use with ordinary materials where loading and environmental conditions are not severe.
- 2.5-3 For less tried and for brittle materials where loading and environmental conditions are not severe.
- 3-4 For applications in which material properties are not reliable and where loading and environmental conditions are not severe, or where reliable materials are to be used under difficult loading and environmental conditions.

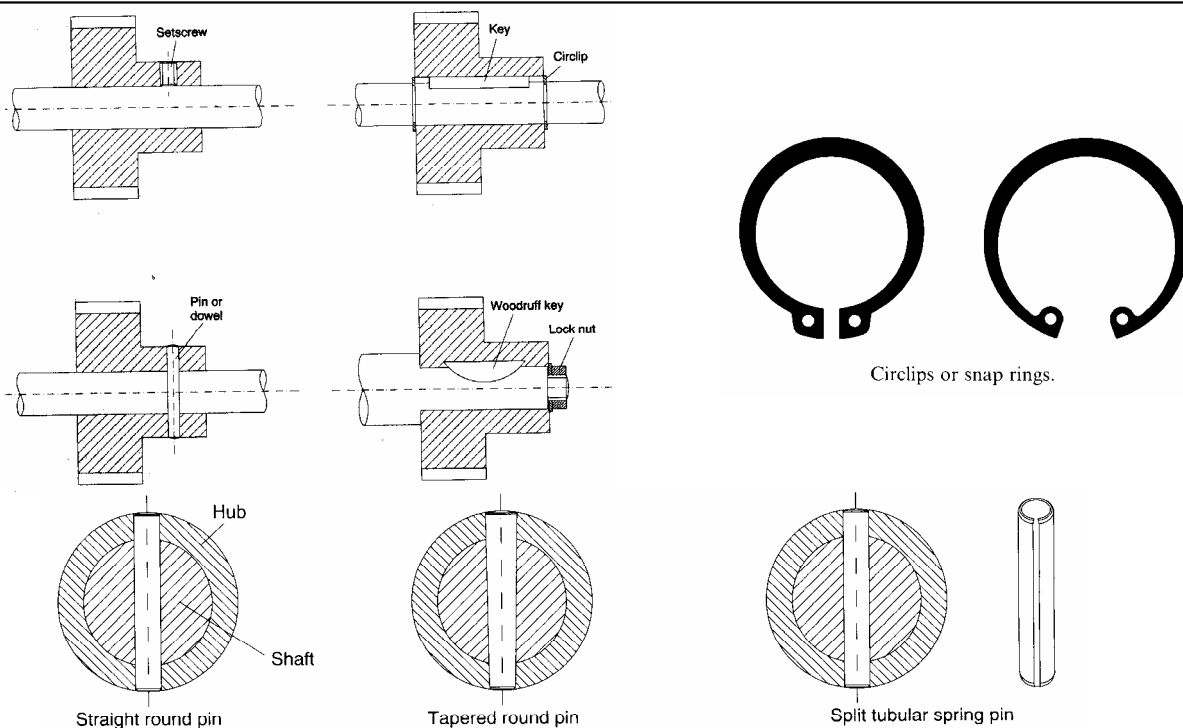
فارها : Keys

❖ فارها امکان جدا کردن اجزای سیستم انتقال قدرت را میسر می کنند.

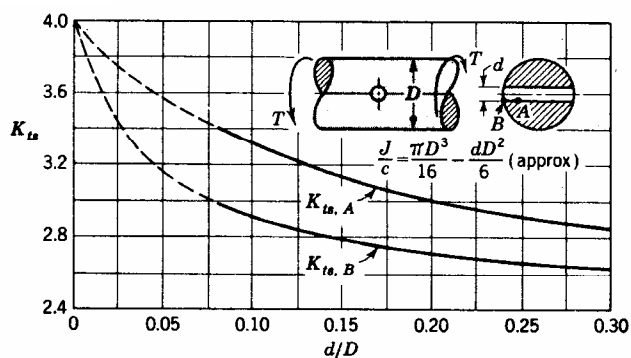
❖ در صورت نصب قطعات انتقال قدرت روی محور (پولی، پرفرنده، پرف زنجیر)، امکان انتقال گشتاور بین اجزا ممکن می گردد.

❖ برای انواع فارها استانداردهایی از نظر ابعاد تدوین شده است. (ANSI/ASME B17.1, B17.2)

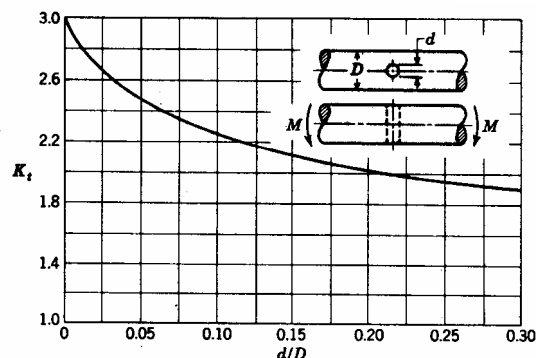




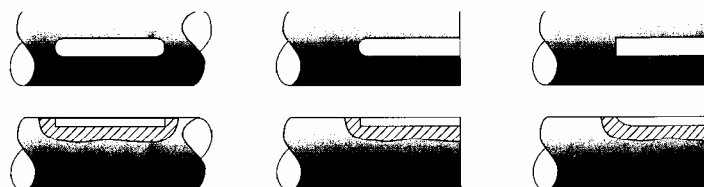
Pins for torque transmission and component location.



Round shaft in torsion with transverse hole.



Round shaft in bending with a transverse hole. $\sigma_0 = M/[\pi D^3/32 - (dD^2/6)]$, approximately.

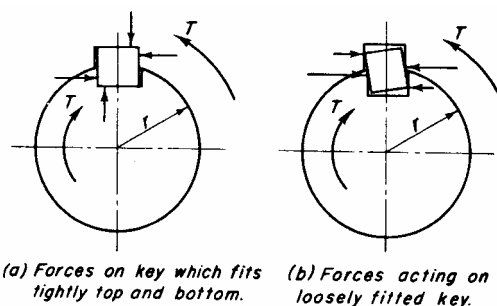
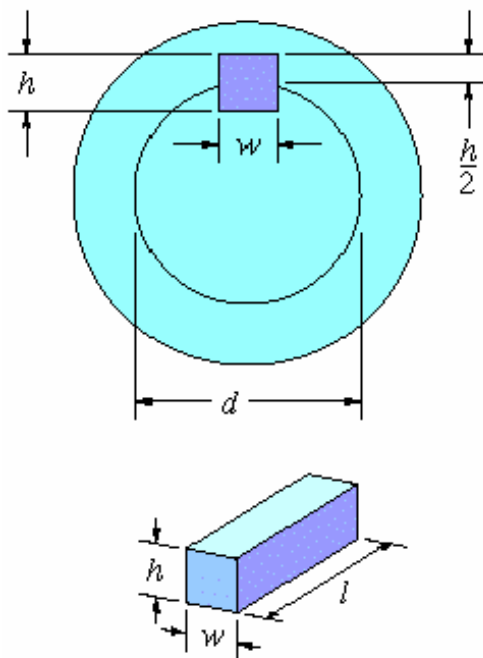


(a) End-milled keyway—double-ended (b) End-milled keyway—single-ended (c) Sled-runner keyway—single-ended

Fatigue stress concentration for keyways in steel shafts K_f		
Steel	Profiled keyways bending stress	Sled runner keyways bending stress
Medium Carbon, Annealed <200BHN	1.61	1.32
Chrome-Nickel, Heat treated >200BHN	2.07	1.61

▪ آنالیز تنش خارها:

خار تحت بارگذاری ممکن است در شرایط متفاوتی صدمه ببیند:



▪ برش خار:

تلورانس ها به گونه ای می باشند که امکان حرکت آزاد خار غیر ممکن است. در این شرایط:

$$P = \frac{T}{d/2} \Rightarrow \tau_{all} = \frac{P}{A_{shear}} = \frac{2T}{dw\ell} \leq \frac{0.5\sigma_{yp}}{Fs}$$

نیروی برشی وارده بر خار

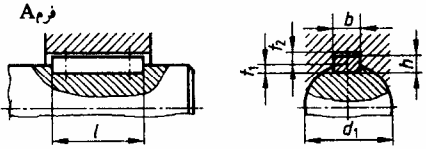
▪ لهیدگی خار:

$$P = \frac{T}{d/2} \Rightarrow \sigma_{all} = \frac{2T}{d\ell h/2} = \frac{4T}{d\ell h} \leq \frac{\sigma_{yp}}{Fs}$$

نیروی لهیدگی وارده بر خار

▪ طراحی خارها:

- ❖ ابعاد خارها استاندارد شده اند و بر اساس قطر محور تعیین می شوند.
- ❖ طول و تعداد خارها بر اساس قدرت انتقالی مناسبه می شوند.
- ❖ استحکام مکانیکی خار به گونه ای است که در شرایط اضطراری، قبل از کسیفستگی سایر اجزاء یا لهیدگی نشیمنگاه خار بریده می شود.
- ❖ مصالح خار، از مواد نرم (معمولاً فولاد کم کربن) است.

DIN 6885		خارهای تخت (نوع بلند) ، جای خارها															
 فرم A ، با انتهای جای خار قوسی شکل فرم B ، با انتهای جای خار تخت		تولرانس جای خار															
		P 9 N 9		نشیمن محکم نشیمن آزاد		عرض جای خار محور b											
		P 9 JS 9		نشیمن محکم نشیمن آزاد		عرض جای خار توپی b											
		+ 0,1...0,2		تولرانس مجاز		عمق جای خار محور t1											
		+ 0,1...0,2		تولرانس مجاز		عمق جای خار توپی t2											
از تا	d1	6	8	10	12	17	22	30	38	44	50	58	65	75	85	95	110
از تا	b	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	25	28	32
از تا	h	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	14	14	16	18
از تا	t1	1,2	1,8	2,5	3	3,5	4	5	5	5,5	6	7	7,5	9	9	10	11
از تا	t2	1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	3,3	3,3	3,8	4,3	4,4	4,9	5,4	5,4	6,4	7,4
از تا	l	6	6	8	10	14	18	20	28	36	45	50	56	63	70	80	90
از تا	نامی	20	36	45	56	70	90	110	140	160	180	200	220	250	280	320	360
از تا	طول نامی	6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 28, 32, 36, 40, 45, 50, 56, 63, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180 200, 220, 250, 280, 320mm															

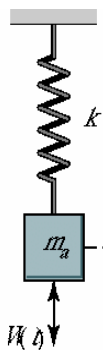
▪ سرعت بحرانی محورها:

در محوره‌ای دوار، ناپایداری دینامیکی در سرعت‌های دورانی خاصی مشاهده می‌شود و مقدار خیز با سختی محور، سختی یاتاقانها، جرم محور و اجزای نصب شده روی آن، میرایی سیستم و سرعت محور تغییر می‌کند.

- ❖ فرکانس طبیعی ارتعاشات جانبی محور، سرعت بحرانی نام دارد.
- ❖ هر محور از نگاه تئوریک بینهایت سرعت بحرانی دارد اما از دیدگاه طراحی سرعت بحرانی اول و در بعضی موارد سرعت بحرانی دوم مورد توجه است.
- ❖ سرعت‌های بحرانی بزرگتر یا خارج از محدود کار هستند و یا توسط پدیده‌هایی مانند میرایی سازه‌ای مستهلک می‌شوند

▪ سرعت بحرانی محور با یک جرم متمرکز:

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{w/\delta}{w/g}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}}$$



شتاب جاذبه : g

خیز استاتیکی : δ

▪ سرعت بحرانی محور با چند جرم متمرکز:

❖ روش Rayleigh :

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{g(w_1\delta_1 + w_2\delta_2 + \dots)}{w_1\delta_1^2 + w_2\delta_2^2 + \dots}}$$

w_i : وزن جرم متمرکز شماره i

δ_i : خیز استاتیکی در موقعیت جرم متمرکز i

معادله ریلی بر اساس روش انرژی بدست آمده است و سرعت بحرانی را بیشتر از مقدار واقعی تخمین می زند زیرا خیز واقعی بیشتر از خیز استاتیکی است.

❖ معادله Dunkerley :

$$\frac{1}{\omega_{cr}^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}$$

$$\omega_i = \sqrt{g / \delta_i}$$

ω_i : سرعت بحرانی بر اساس جرم متمرکز شماره i

معادله دانکرلی سرعت بحرانی را کمتر از مقدار واقعی تخمین می زند.

