

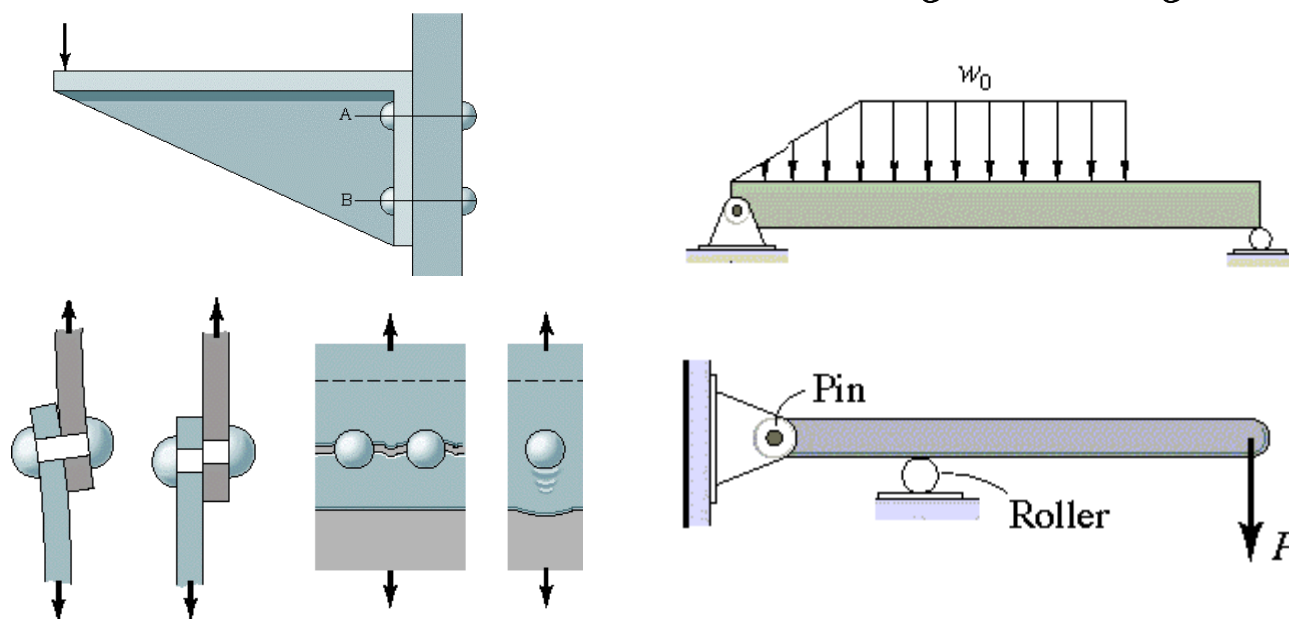
♦ تحلیل بارگذاری و مطالعه رفتار قطعات تحت بار:

❖ هدف: اطمینان داشتن از این که استحکام قطعه طراحی شده بیشتر از تنش ناشی از هر باری است که ممکن است در شرایط عملکردی به قطعه وارد شود

▪ مقطع بحرانی:

اگر قطعه تحت بار دچار گسیختگی یا شکست شود در ناحیه یا مقطع خاصی از قطعه، بارهای داخلی از حد مجاز بالاتر رفته است که به این موقعیت، ناحیه یا مقطع بحرانی گفته می شود. برای تعیین مقطع بحرانی در طراحی باید موارد زیر مشخص شود:

- ❖ شیوه اعمال بار و مقدار بار خارجی و نقاط یا نواحی که بار بر قطعه در شرایط عملیاتی وارد می شود.
- ❖ مقادیر و جهت اعمال بار که بر اجزای ماشین در شرایط عملیاتی اثر می کند.
- ❖ محل های اعمال بار بحرانی بر اجزای ماشین در بارگذاری های ممکن
- ❖ نوع بارگذاری در مقاطع بحرانی با توجه به شیوه های مختلف اعمال بار و شکل مهندسی قطعات



▪ طبقه بندی انواع بارگذاری نسبت به زمان:

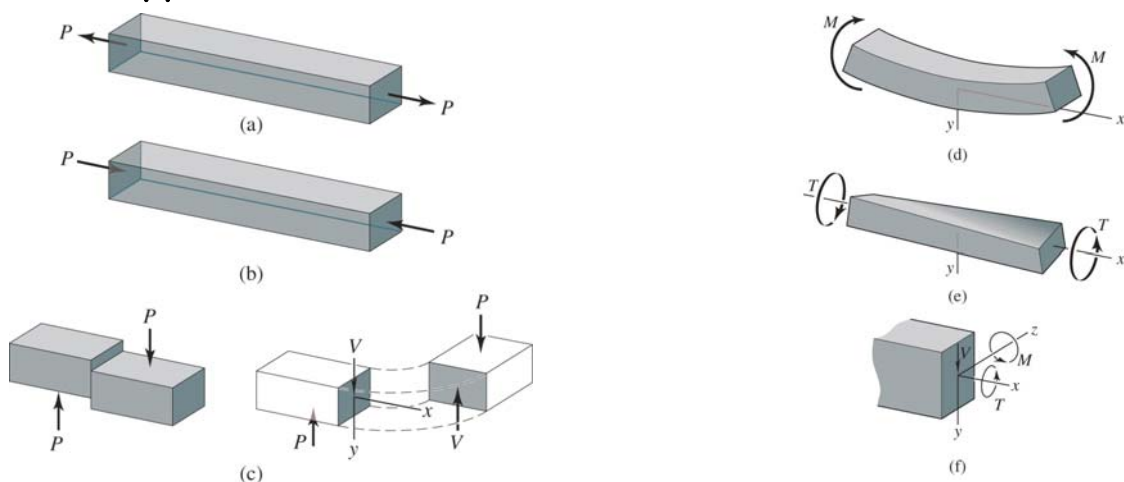
- ❖ بارگذاری استاتیکی: تغییرات بارگذاری بسیار کند یا ثابت است.
- ❖ بارگذاری ضربه ای: در اثر اعمال بار در مدت کوتاهی مقدار زیادی انرژی به سیستم وارد می شود.
- ❖ بارگذاری نوسانی: مقدار و جهت بار با پریود خاصی تغییر می کند.

▪ طبقه بندی انواع بارگذاری از نظر نقطه اثر نیرو:

- ❖ بارگذاری متمرکز: بار در ناحیه بسیار کوچکی در مقایسه با ابعاد دیگر توزیع شده است.
- ❖ بارگذاری گسترده: بار در سطح بزرگی توزیع شده است.

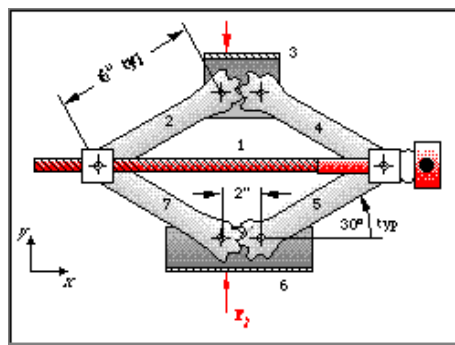
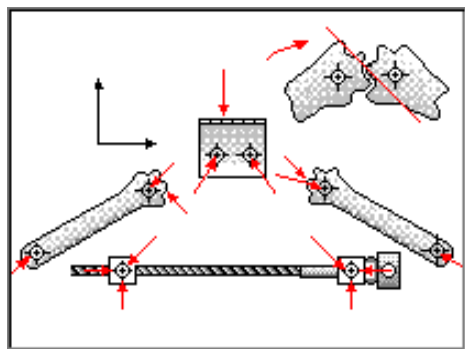
▪ طبقه بندی انواع بارگذاری از نظر شیوه اعمال بار:

- ❖ بار محوری: قطعه تحت کشش خالص (بار مثبت) یا تحت فشار خالص (بار منفی) قرار دارد.
- ❖ بار برشی: برش خالص مثبت باعث قیچی شدن قطعه مطابق شکل می شود.
- ❖ بار خمشی: خمش خالص مثبت باعث کشیده شدن المانهای نیمه پایینی مقطع و فشرده شدن المانهای نیمه بالایی مقطع می شود.
- ❖ بار پیچشی: بار پیچشی خالص باعث تابیدن قطعه مطابق قاعده دست راست می شود.
- ❖ بار ترکیبی: در حالت کلی شامل بارگذاری همزمان برشی، محوری، خمشی و پیچشی می باشد.



♦ نمودار جسم آزاد (free body diagram):

به نمایش جداگانه بارگذاری ناشی از نیروهای خارجی و عکس العمل های تکیه گاهی روی هر یک از اجزای ماشین نمودار آزاد جسم گفته می شود.



در نمودار آزاد اجزای یک ماشین، موارد زیر ممکن است مشاهده شود:

▪ تیرها (beams): جزئی از ماشین که:

- ❖ در حالت کلی برای تحمل بارهای جانبی (غیر محوری) طراحی می شوند.
- ❖ در مقایسه با ابعاد مقطع دارای طول بسیار بلند هستند.
- ❖ تحلیل فیز تیرها، تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی مبنای طراحی استاتیکی تیرها است.
- ❖ در تیرهایی که اختلاف ابعاد مقطع (ارتفاع نسبت به پهنا) زیاد است تحلیل ناپایداری الاستیک نیز اهمیت دارد.

❖

▪ ستونها (columns): جزئی از ماشین که:

- ❖ برای تحمل بارهای محوری فشاری طراحی می شوند.
- ❖ در تحلیل ستونهای بلند، کمانش مورد توجه اساسی است و تعیین کننده شرایط بحرانی است.

❖

▪ محورها (shafts): جزئی از ماشین که:

- ❖ معمولاً با مقطع دایره ای و برای انتقال قدرت بکار می رود.
- ❖ طول محورها در مقایسه با قطر آنها بسیار بزرگ است.
- ❖ بارگذاری روی محورها به صورت ترکیبی و همراه با بارهای ضربه ای و نوسانی است.
- ❖ در تحلیل محورها، خستگی و رفتار دینامیکی تعیین کننده شرایط بحرانی است.

❖

▪ اجزای استاندارد:

- ❖ اجزایی که مخصوص یک ماشین خاص نیستند و قابل استفاده عمومی در طراحی می باشند.
(پیچها، پرفدنده ها، زنجیرها، بلبرینگ ها و)
- ❖ طراحی بر اساس نتایج تجربی معتبر و استانداردها است.

▪ اجزای فاص:

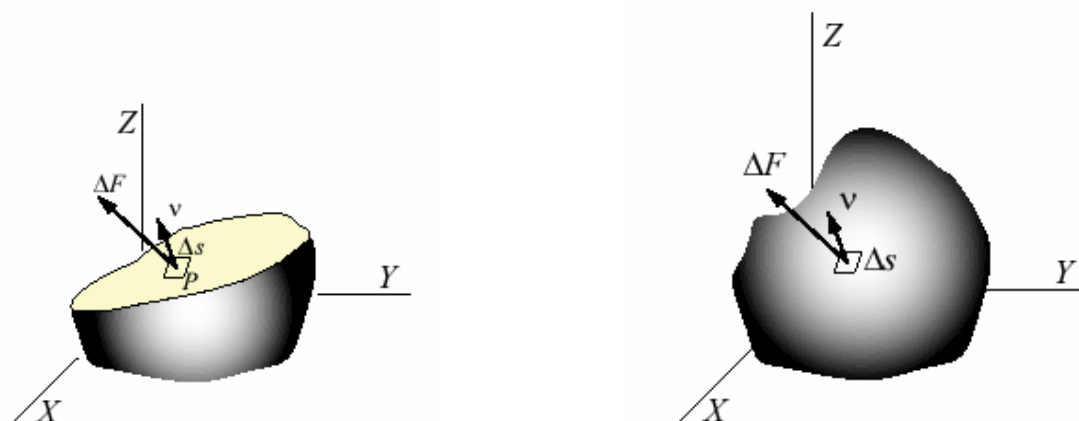
- ❖ جهت اتصال اجزای یک ماشین فاص و انتقال بار و حرکت بین آنها طراحی میشوند.
- ❖ در بسیاری از موارد تحلیل اجزای فاص به روش های ساده تقریبی میسر نیست و استفاده از روش اجزاء محدود تحلیل کاملی را در اختیار می گذارد.
- ❖ در بسیاری موارد، ابعاد اجزای فاص بسیار بزرگ طرح می شوند و نیازی به تحلیل دقیق ندارند.
- ❖ کسیفنگی های ناشی از تنش های تماسی استاتیکی و دینامیکی، سایش و فستگی سطحی تعیین کننده شرایط بحرانی طراحی می باشند.

♦ تنش:

اعمال بارهای خارجی بر یک قطعه باعث پدید آمدن نیروهای داخلی می شود که بر هر نقطه از جسم اثر می کند. اثرات نیروهای داخلی وارده بر هر المان سطح روی یک مقطع خاص به کمک تعریف زیر بیان می شود:

$$\sigma_{avg} = \frac{\text{نیروی متوسط}}{\text{مساحت}} = \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad \text{تنش متوسط روی یک صفحه}$$

$$\sigma = \lim \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \quad \text{تنش در یک نقطه}$$



- ❖ توجه: تنش در هر نقطه یک بردار است و دارای مقدار و جهت می باشد.

■ المان تنش:

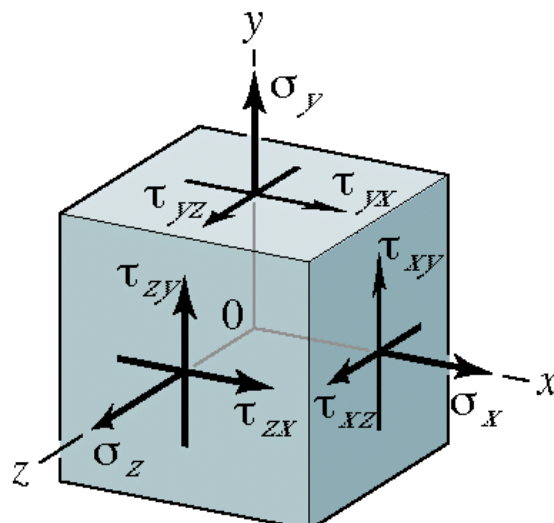
اگر مکعب بینهایت کوچکی از جسم جدا شود می توان نیروی داخلی روی هر وجه را به سه مؤلفه عمود بر هم تجزیه کرد. بر این اساس روی هر وجه سه مؤلفه تنش قابل تعریف است.

$\tau_{\zeta\eta}$: تنش برشی روی صفحه ای عمود بر محور

ζ و در راستای محور η

σ_{ζ} : تنش قائم روی صفحه ای عمود بر محور

ζ و در راستای محور ζ .



❖ قرارداد علامت تنش قائم: اگر تنش قائم و برداریکه عمود بر سطح همجهت باشند تنش کششی و علامت آن مثبت است.

❖ قرارداد علامت تنش برشی: اگر برداریکه عمود بر سطح و تنش و برشی (هر دو) در جهت مثبت یا هر دو در جهت منفی دستگاه مختصات باشند علامت تنش برشی مثبت است.

از تعادل نیروها و لنگرها می توان نتیجه گرفت:

❖ تنش های قائم و برشی در دو وجه مقابل هم مساوی و در خلاف جهت یکدیگر هستند.

❖ تنش های برشی متقارن هستند:

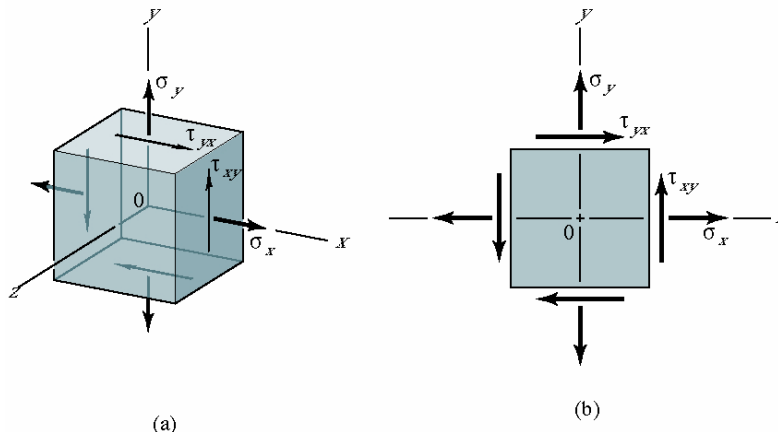
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

❖ روی هر المان سه بعدی سه مؤلفه تنش قائم و سه مؤلفه تنش برشی اثر می کند که بصورت تانسور مرتبه ۲ نمایش داده می شود:

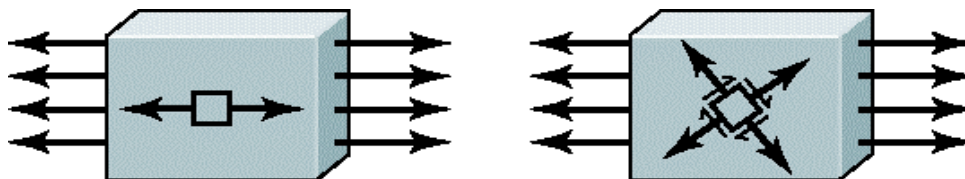
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

♦ توزیع تنش صفحه ای (Plane stress):

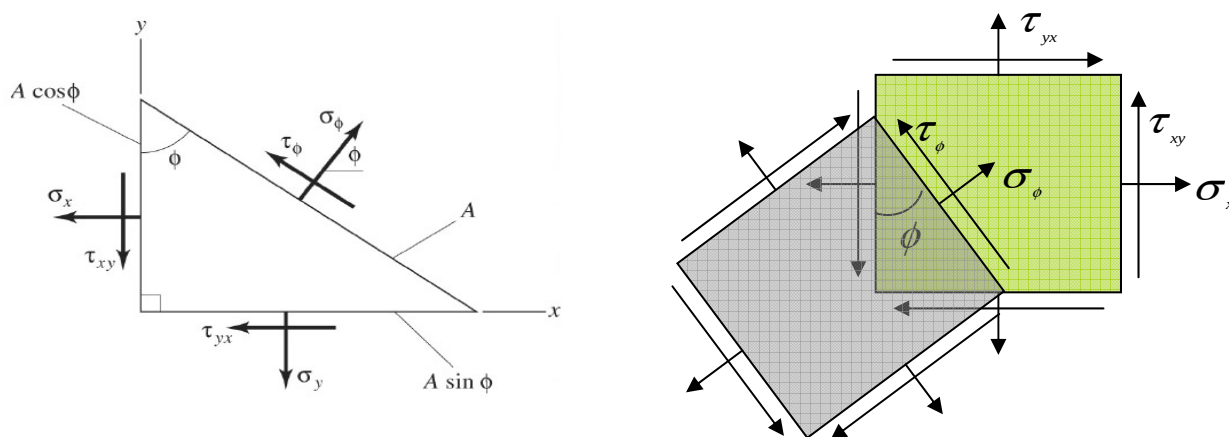
اگر توزیع نیروی داخلی در قطعه به گونه ای باشد که به یک وجه المان در مقایسه با وجوه دیگر، تنش قابل توجهی اعمال نشود حالت توزیع تنش را "صفحه ای" گویند.



مقادیر مؤلفه های تنش بستگی به جهت قرار گرفتن المان در دستگاه مختصات دارد و با تغییر جهت المان تغییر می کنند اما قابل تبدیل به یکدیگر هستند.



اگر برش موربی از المان در حال تعادل در نظر گرفته شود به کمک روابط تعادلی می توان نوشت:



$$\sigma_{\phi} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi$$

$$\tau_{\phi} = \tau_{xy} \cos 2\phi - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi$$

♦ تنش های اصلی:

در زاویه ای خاص مقدار σ_ϕ بیشترین یا کمترین مقدار خود را دارد:

$$\frac{d\sigma_\phi}{d\phi} = 0 \Rightarrow \tan 2\phi_\sigma = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

ϕ_σ : زاویه ای که تنش قائم مقدار اکسترمم خود را دارد. ϕ_σ دارای دو جواب است زیرا:

$$\tan 2\phi_\sigma = \tan(180^\circ + 2\phi_\sigma)$$

اگر در زاویه ϕ_σ ، مقدار تنش قائم ماکزیمم گردد در $\phi_\sigma + 90^\circ$ مقدار تنش مینیمم خواهد شد و بالعکس.

$$\sigma_{\max}, \sigma_{\min} = \sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2} \quad \tau_{\phi\sigma} = 0$$

♦ محورهاى اصلی و تنش های اصلی:

روی صفحاتی که تنش های قائم ماکزیمم و مینیمم مشاهده می شوند تنش برشی صفر است. به این صفحات، "صفحات اصلی تنش"، به تنش هایی که روی این صفحات اثر می کنند "تنش های اصلی" و محورهایی که در راستای آنها تنش های اصلی قرار دارند "محورهای اصلی" نام دارند.

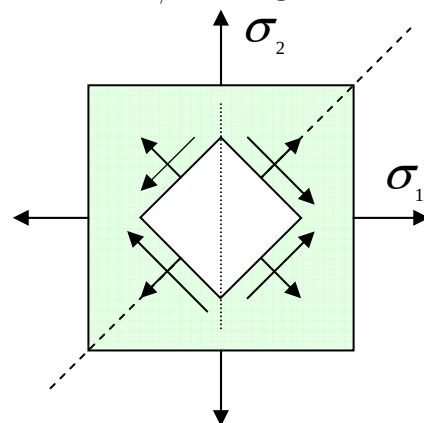
▪ تنش برشی بیشینه:

در جهت خاصی مقدار τ_ϕ بیشترین (یا کمترین) مقدار خود را داراست:

$$\frac{d\tau_\phi}{d\phi} = 0 \Rightarrow \tan 2\phi_\tau = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$

$$\tau_{\max}, \tau_{\min} = \tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\phi_\tau} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \sigma_{\phi_\tau} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



❖ روی صفحاتی که تنش های برشی بیشینه هستند تنش های قائم روی دو وجه المان برابرند.

❖ اختلاف زاویه جهت اصلی با جهتی که تنش برشی بیشینه مشاهده می شود برابر $\pi/4$ است:

$$|\phi_\tau - \phi_\sigma| = \pi/4$$

♦ توزیع تنش سه مموری:

مانند توزیع تنش صفحه ای، برای یک المان تنش در فضا نیز حالتی را می توان یافت که همه مولفه های تنش برشی صفر گردد. تنش های عمودی وارده بر این حالت المان تنش های اصلی و راستا های عمود بر وجوه این المان جهت های اصلی نام دارد. به کمک تانسور تنش می توان نشان داد که تنش های اصلی $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ریشه های معادله مشخصه زیر است:

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0$$

همچنین تنشهای برشی اصلی عبارتند از:

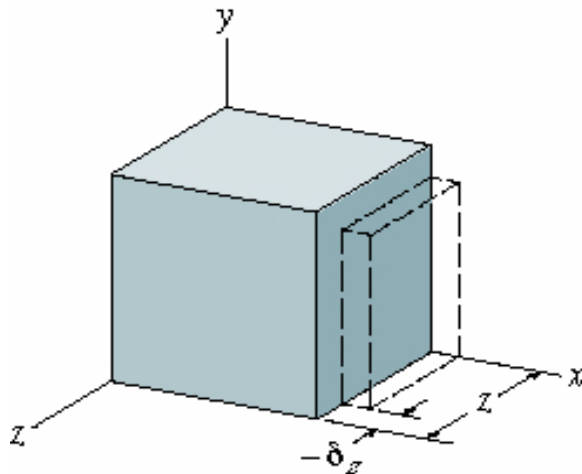
$$\tau_{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \tau_{1/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

♦ کرنش:

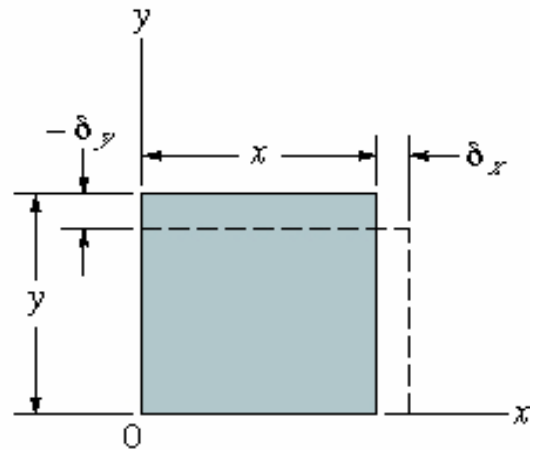
نسبت جابجایی حاصل از اعمال تنش به طول اولیه.

▪ کرنش قطعی:

نسبت تغییر طول المان به طول اولیه آن تحت تاثیر تنش قائم.



(a)



(b)

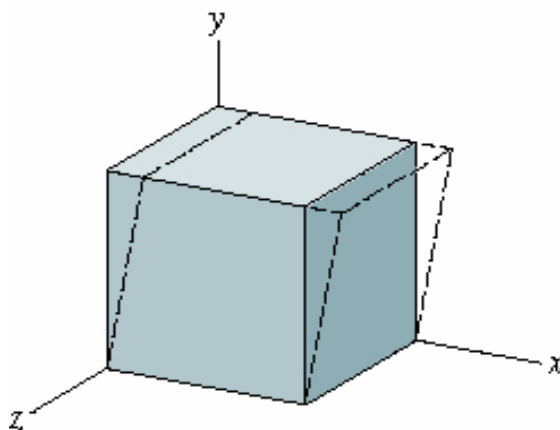
$$\epsilon_x = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta x}{x}$$

$$\epsilon_y = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{\delta y}{y}$$

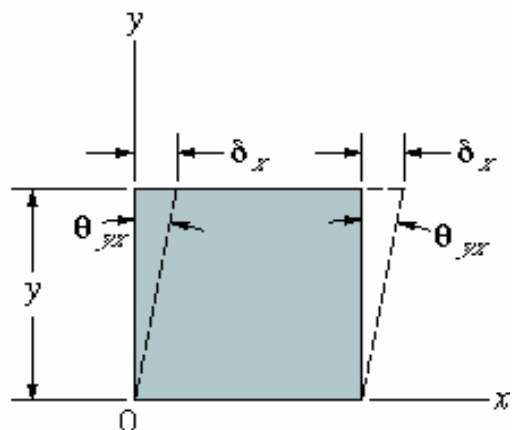
$$\epsilon_z = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta z}{z}$$

▪ کرنش برشی:

تغییر زاویه دو خط عمود بر هم در یک المان در اثر اعمال تنش برشی



(a)



(b)

$$\gamma_{xy} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta x}{y} = \tan \theta_{yx} \cong \theta_{yx}$$

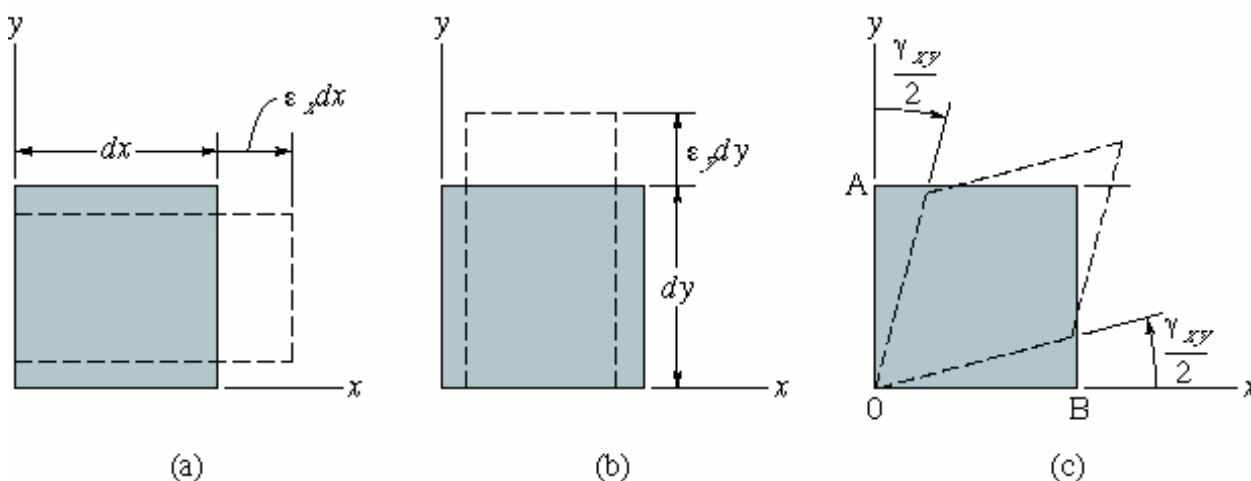
▪ تانسور کرنش:

برای یک المان مکعبی در یک میدان تنش، کرنش به صورت یک تانسور نوشته می شود:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

▪ کرنش صفحه ای:

اگر تغییر شکل در میدان تنش به گونه ای باشد که بتوان از مؤلفه های کرنش ε_z و γ_{yz} و γ_{xz} صرف نظر نمود، تنها تغییر شکل های خطی و زاویه ای در صفحه xy مشاهده خواهد شد.



❖ قرارداد:

❖ علامت کرنش قطبی در جهت x یا y مثبت است اگر در جهت x یا y افزایش طول مشاهده شود.

❖ علامت کرنش زاویه ای در صفحه xy مثبت است اگر زاویه داخلی xoy نسبت به حالت اولیه کاهش یابد.

▪ کرنشهای اصلی و کرنش برشی بیشینه:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2}$$

$$\gamma_{\max} = \pm 2 \sqrt{\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2} \quad \tan(2\phi) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

♦ تحلیل تنش و کرنش قطعات تحت بارگذاری:

قطعات ماشین متناسب با شیوهٔ بکارگیری آنها در یک مجموعه، تحت تاثیر بارگذاری های مختلفی قرار می گیرد که یکی از گامهای اساسی در طراحی، تحلیل تنش و کرنش قطعات تحت بارگذاری می باشد. انواع مختلف بارگذاری باعث ایجاد توزیع تنشها و کرنشهای خاصی در قطعات می شود.

▪ تنش و کرنش مموری:

❖ نیروی مموری باعث تغییر طول قطعه می شود.

❖ در یک مقطع دور از ابتدا و انتهای قطعه، توزیع تنش

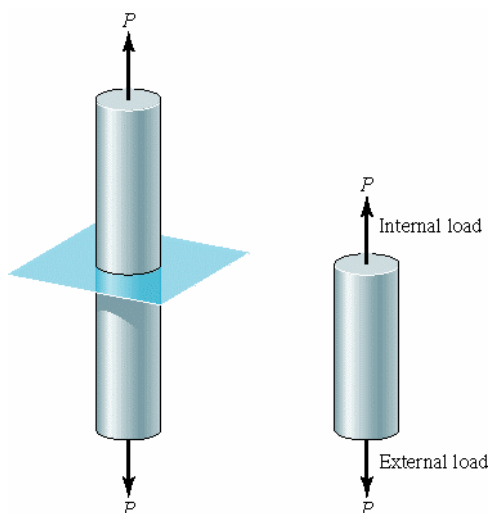
متوسط از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

❖ در ابتدا و انتهای قطعه، توزیع تنش از توزیع یکنواخت

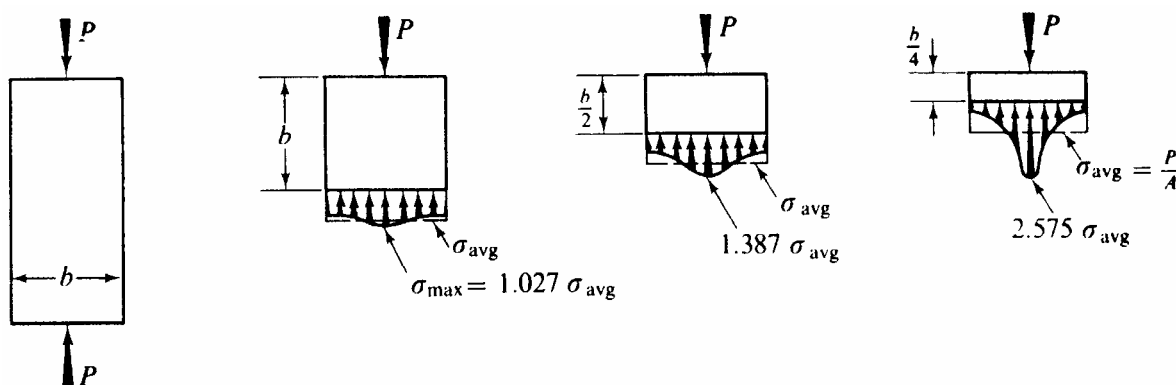
فوق تفاوت بسیاری دارد و تحلیل دقیق آن به کمک

حل معادلات دیفرانسیل تئوری الاستیسته میسر است.



▪ اصل سن و نان St. Venant :

این اصل بیانگر این پدیده است که توزیع تنش با فاصله گرفتن از موضع اعمال بار خارجی تمایل به یکنواخت شدن دارد.



❖ اگر بارگذاری خارجی اعمال شده در ناحیهٔ کوچکی از جسم با بار دیگری که از نظر تعادل استاتیکی

با بار اولیه هم ارز است جایگزین شود، در توزیع تنش قائم و برشی در فواصل دور تغییری مشاهده

نمی شود.

▪ کرنش فطی قطعه با مقطع یکنواخت تحت اثر بار مموری:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\ell} = \frac{\text{elastic deformation}}{\text{initial length}}$$

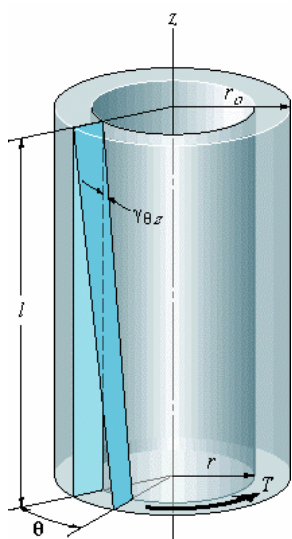
▪ قانون هوک:

در محدوده تغییر شکل های الاستیک، رابطه خطی تنش و کرنش در بارگذاری تک جهته به صورت زیر است:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{or} \quad \varepsilon = \sigma/E \Rightarrow \delta = \varepsilon\ell = \frac{\sigma}{E}\ell = \frac{p\ell}{AE}$$

♦ پیچش:

بار گذاری یک قطعه تحت گشتاور محوری باعث تغییر شکل پیچشی حول محور قطعه می شود. تغییر شکل مواد ایزوتروپ تحت بارگذاری پیچشی مطابق شکل به گونه ای است که:



❖ پس از اعمال پیچش، صفات مادی عمود بر محور استوانه به

شکل صفحه اولیه خود باقی می ماند. بنابراین:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \gamma_{r\theta} = \gamma_{rz} = 0, \quad \gamma_{\theta z} \neq 0$$

❖ کرنش برشی به صورت فطی از محور مرکزی افزایش می یابد.

$$\gamma_{\theta z} = \frac{rd\theta}{dz} = \frac{r\theta}{\ell}$$

❖ مطابق قانون هوک، تنش برشی متناسب با کرنش برشی است:

$$\tau_{\theta z} = G\gamma_{\theta z} = \frac{Gr\theta}{\ell}$$

تنش برشی بصورت خطی با فاصله گرفتن از محور تغییر می کند. از شرایط تعادل داریم:

$$T = \int_A r(\tau_{\theta z} dA) = \frac{G\theta}{\ell} \int_A r^2 dA \Rightarrow T = \frac{G\theta J}{\ell} = \frac{\tau J}{r}$$

$$\theta = \frac{T\ell}{GJ}$$

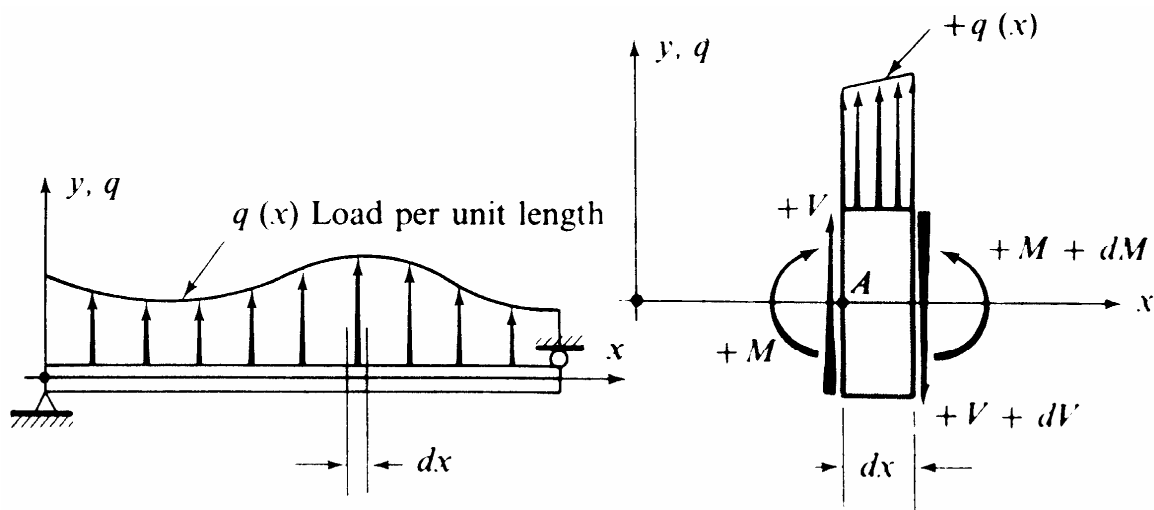
$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

♦ خمشی تیرها

▪ نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیرها:

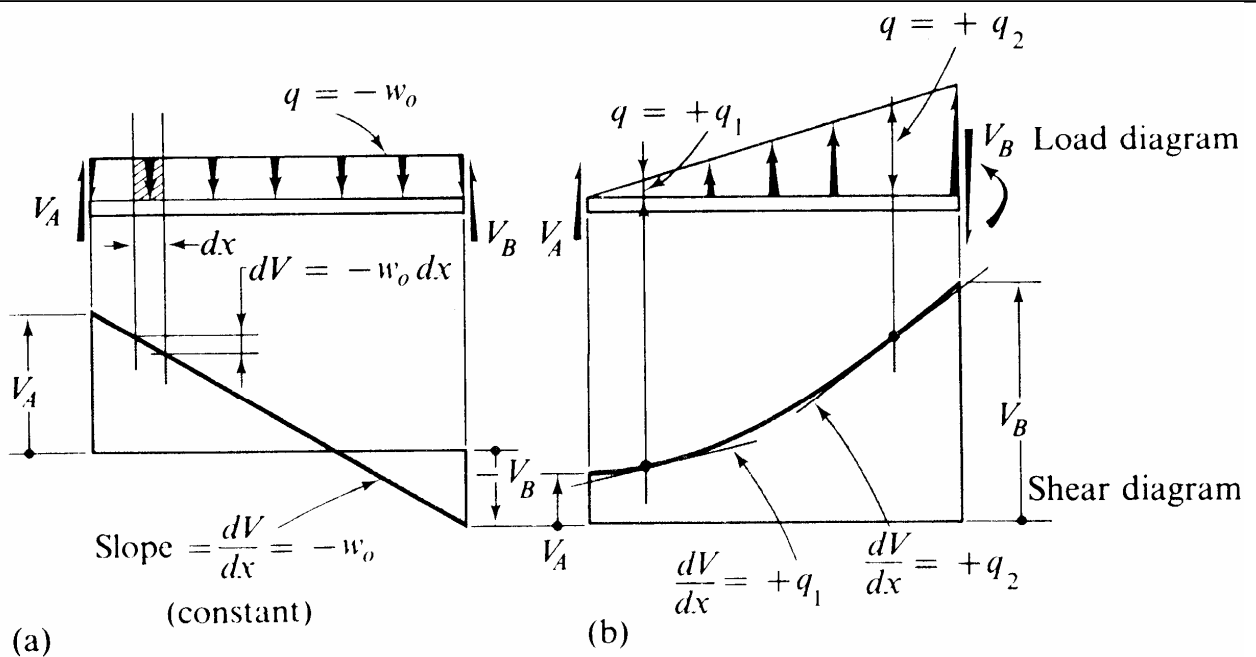
تحلیل مقاومت مکانیکی تیرها، به کمک تعیین محل هایی که نیروی برشی و لنگر خمشی بیشینه است میسر می گردد.

▪ معادلات دیفرانسیل تعادل استاتیکی نیروها و لنگرها:

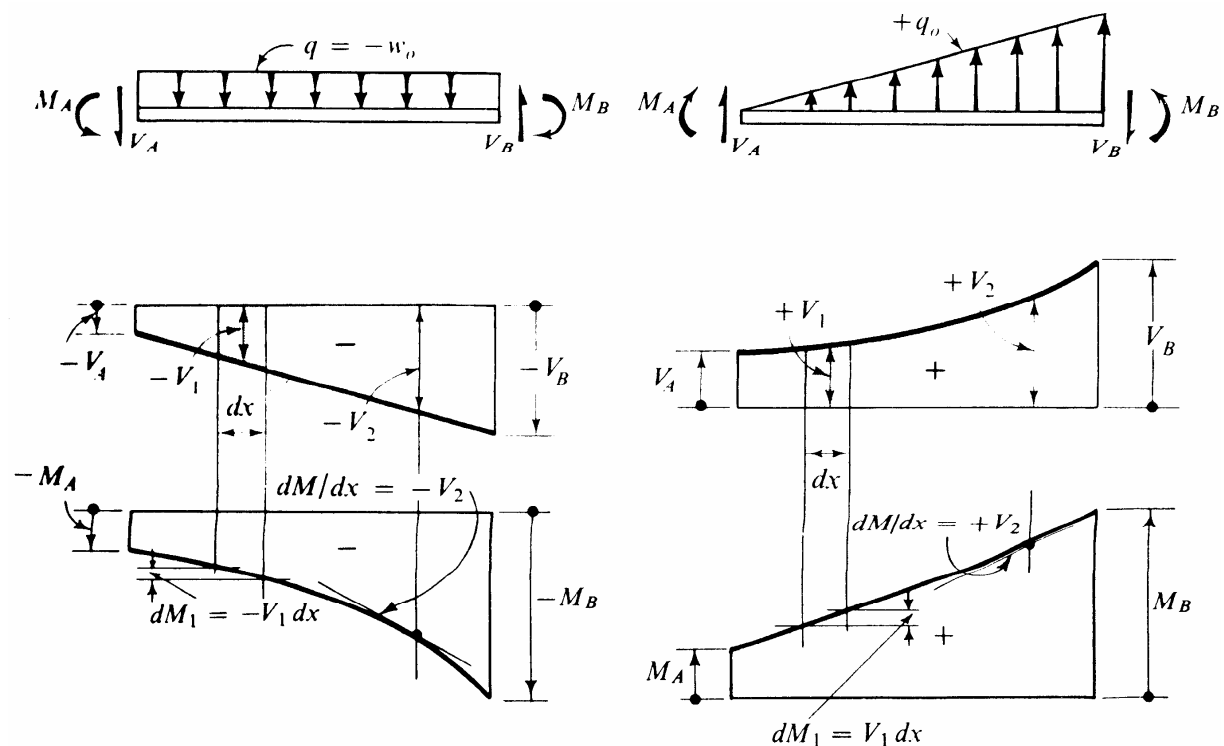


$$\left. \begin{aligned} \sum F = 0 &\Rightarrow V + q(x)dx - V - dV = 0 \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow -M + (M + dM) + q(x)dx \frac{dx}{2} - (V + dV)dx = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= q(x) \\ \frac{dM}{dx} &= V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} \right) = \frac{d^2 M}{dx^2} = q(x) \Rightarrow \begin{cases} V(x) = \int_{x_0}^x q(z) dz \\ M(x) = \int_{x_0}^x V(z) dz \end{cases}$$



$$\text{Slope of shear diagram} = \frac{dV}{dx} = q \begin{cases} + \text{Slope} \\ - \text{Slope} \end{cases}$$

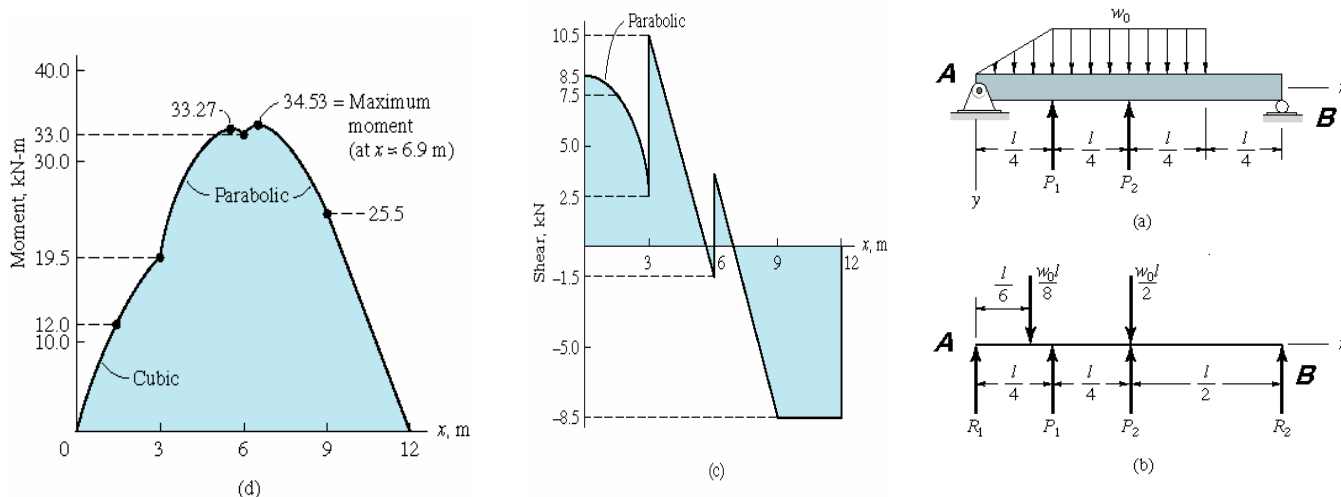


$$\text{Slope of moment diagram} = \frac{dM}{dx} = V \begin{cases} + \text{Slope} \\ - \text{Slope} \end{cases}$$

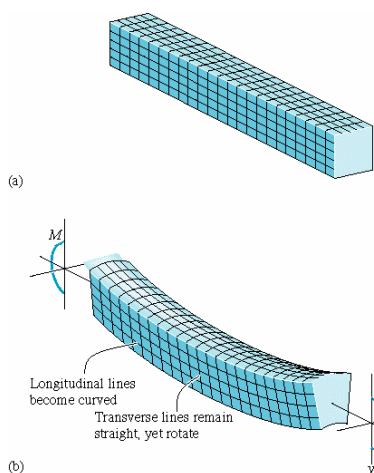
❖ اگر بارگذاری در ناحیه کوچکی از تیر توزیع شده باشد (بار متمرکز) و یا توزیع بار پیوسته نباشد، ناپیوستگی در مدل های توزیع بار، باعث ناپیوستگی در مقدار یا شیب نمودارهای برشی و خمشی خواهد شد.

$$P_1=8\text{kN}, P_2=5\text{kN}; w_0=4\text{kN/m}; l=12\text{m}$$

❖ مثال:

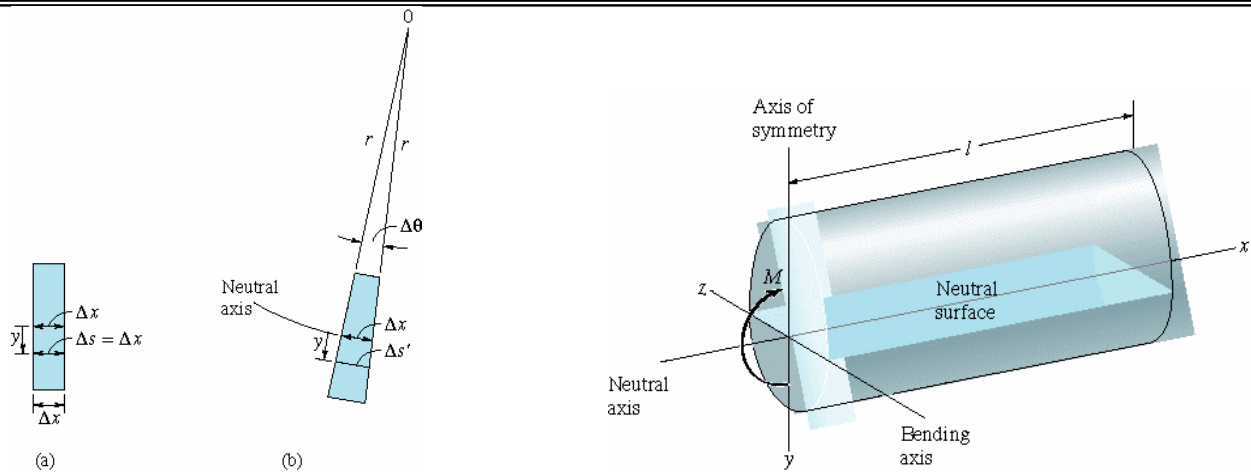


در تحلیل بارگذاری تیرهای تحت خمش فرضیات زیر مورد نظر است:



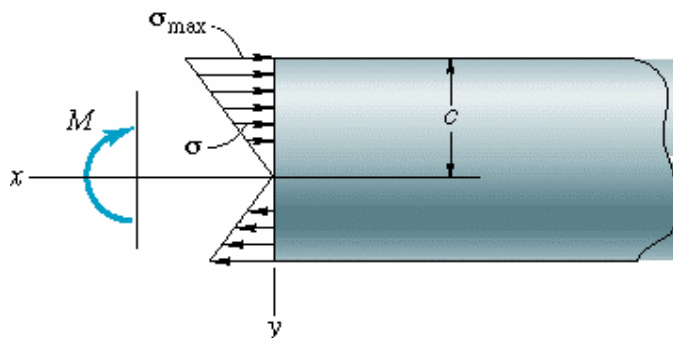
- ❖ سطح مقطع تیر دارای یک محور تقارن قائم است.
- ❖ صفات مادی عمود بر محور تیر، پس از اعمال خمش به همان شکل صفحه اولیه خود باقی می ماند.
- ❖ رفتار مکانیکی تیر در محدوده تغییر شکل الاستیک خطی است.
- ❖ خطوط مادی طولی به خطوط منحنی جدیدی تبدیل می شوند به گونه ای که در صفحه اولیه باقی می ماند.

❖ لنگر خمشی باعث کشیده شدن ناحیه پایین و فشردگی ناحیه بالایی مقطع می شود و خطوط مادی طولی روی صفحه منحنی، تغییر طول ندارند و روی این صفحه تنش خمشی صفر است.



کرنش خطی روی المان خطی طولی Δs :

$$\epsilon = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{(r + y)\Delta\theta - r\Delta\theta}{r\Delta\theta} = \frac{y}{r} \Rightarrow \frac{\epsilon}{\epsilon_{\max}} = \frac{y/r}{c/r}$$



کرنش خطی بیشینه در دورترین تار مادی
نسبت به تار خنثی رخ می دهد.

$$\epsilon = \frac{y}{c} \epsilon_{\max} \Rightarrow \sigma = \frac{y}{c} \sigma_{\max}$$

▪ تعادل نیروها روی سطح مقطع تیر:

$$\int_A \sigma dA = \int_A \frac{y}{c} \sigma_{\max} dA = \frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y dA = 0 \Rightarrow \int_A y dA = 0$$

❖ بنابراین گشتاور اول سطح حول تار خنثی صفر است.

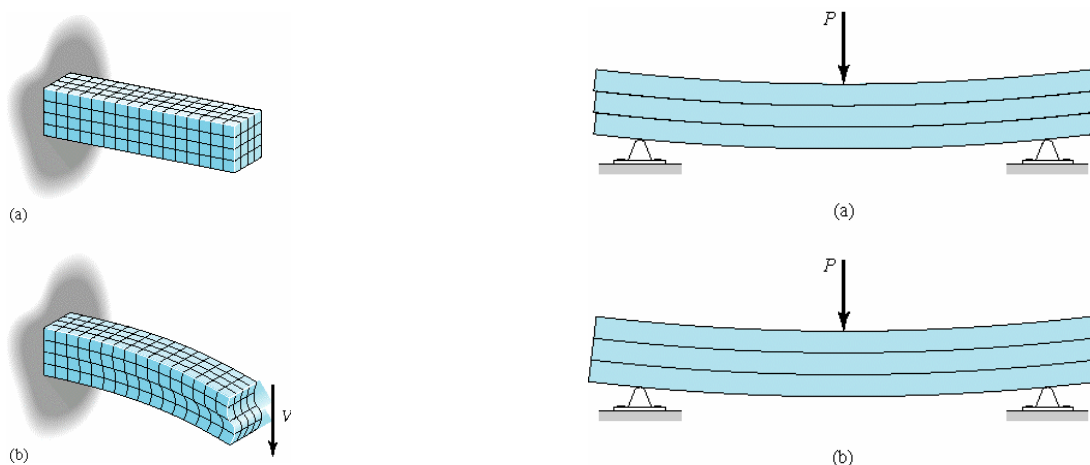
▪ تعادل لنگر خمشی:

$$M = \int_A \sigma y dA = \frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y^2 dA \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} \quad \text{or} \quad \sigma = \frac{My}{I}$$

❖ تنش متناسب با فاصله از تار خنثی تغییر می کند.

♦ تنش برشی در تیرها:

بارگذاری تیرها علاوه بر ایجاد تنش خمشی می تواند عامل ایجاد تنش های برشی نیز گردد.



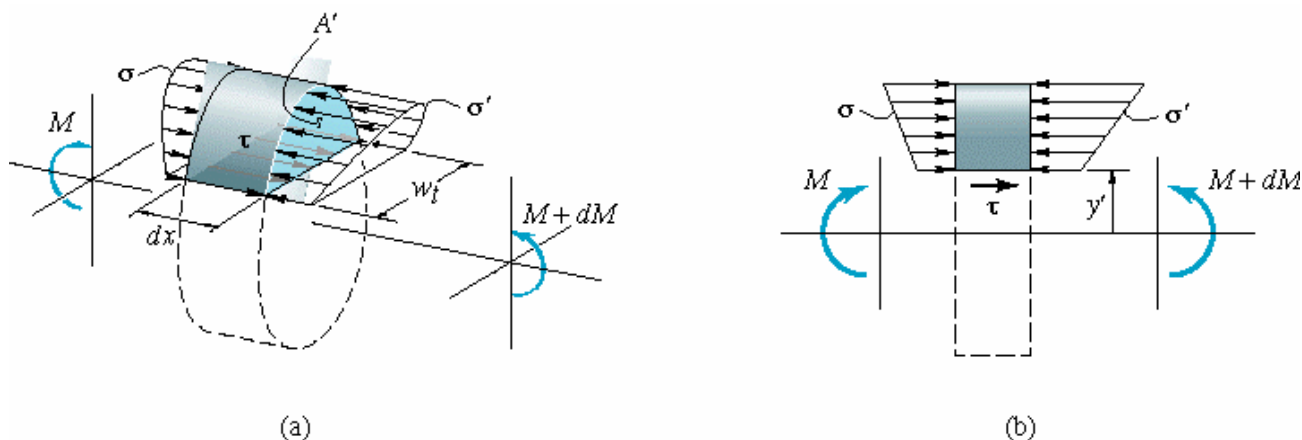
❖ در حالت کلی توزیع تنش های برشی در تیرها باعث تغییر شکل های پیچیده می شود به گونه ای که نمی توان مدل ساده ای برای توزیع کرنش ناشی از نیروهای برشی وضع نمود و از شرایط تعادل رابطه ای بین تنش و کرنش بدست آورد.

▪ یک رویه غیر مستقیم:

برای تحلیل تنش برشی، از توزیع تنش ناشی از لنگر خمشی و شرایط تعادل استفاده می شود. در صورت وجود نیروی برشی در مقطع تیر، تغییرات لنگر خمشی با رابطه زیر بیان می شود:

$$\frac{dM}{dx} = V$$

❖ توجه: وجود نیروی برشی بیانگر تغییرات لنگر خمشی است.



اگر از جزء تیر نشان داده شده به ضخامت dx ، جزء فوقانی آن جدا شود تعادل استاتیکی نیروها

قابل بررسی است.

$$\tau w_t dx = \int_{A'} \sigma' dA - \int_{A'} \sigma dA = \int_{A'} \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int_{A'} \frac{My}{I} dA = dM \frac{\int_{A'} y dA}{I}$$

بنابراین تنش برشی در نقطه ای به فاصله y' از تار خنثی عبارت است از:

V : نیروی برشی در مقطع تیر

I : ممان اینرسی سطح مقطع تیر حول تار خنثی

$$\tau = \frac{VQ}{I w_t}$$

Q : گشتاور اول سطح برش خورده حول تار خنثی

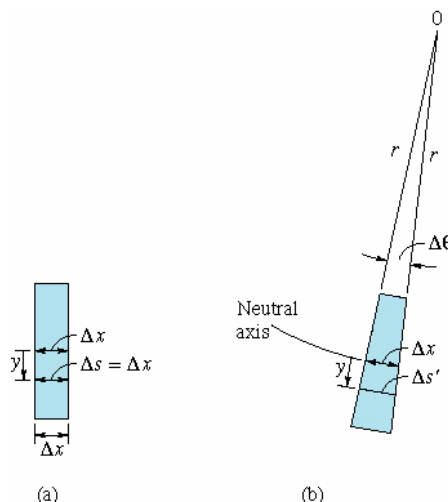
w_t : پهنای مقطع در موقعیت محاسبه تنش برشی

❖ توزیع تنش برشی و موقعیت تنش برشی بیشینه بستگی به شکل سطح مقطع تیر دارد.

♦ تغییر شکل تیرها:

انحنای المانی از تیر تغییر شکل یافته در مختصات کارتزین از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{r} = \frac{-\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$



برای خیزهای کوچک، شیب تیر بسیار کوچک باقی می ماند:

$$\left. \begin{aligned} y' \ll 1 &\Rightarrow \frac{1}{r} = -y'' \\ \sigma = E\varepsilon = \frac{My}{I} \\ \varepsilon = \frac{y}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{r} = -y'' = \frac{M}{EI}$$

❖ رابطه فوق بیانگر ارتباط خیز تیر با توزیع لنگر خمشی است. به کمک رابطه فوق و روابط مشابه قبلی

سعی می شود توزیع بار، نیروی برشی، لنگر خمشی، شیب و فیز تیر به صورت یک دسته معادلات دیفرانسیل یا بصورت ترسیمی بیان شود.

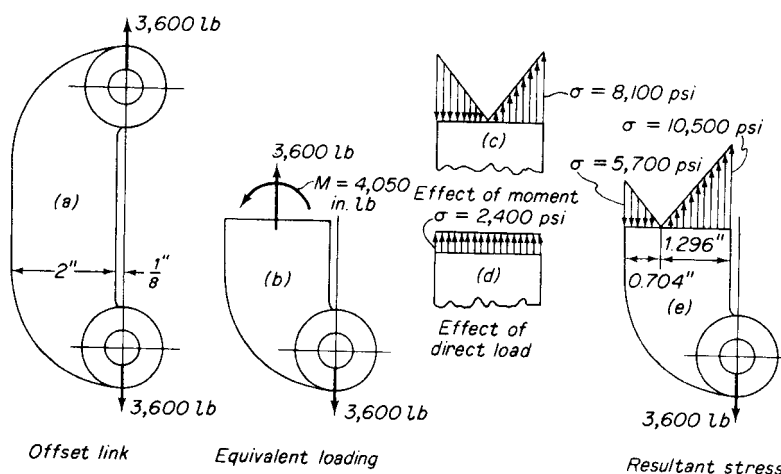
$$y'''(x) = \frac{q}{EI} \quad y'''(x) = -\frac{V}{EI} \quad y''(x) = -\frac{M}{EI}$$

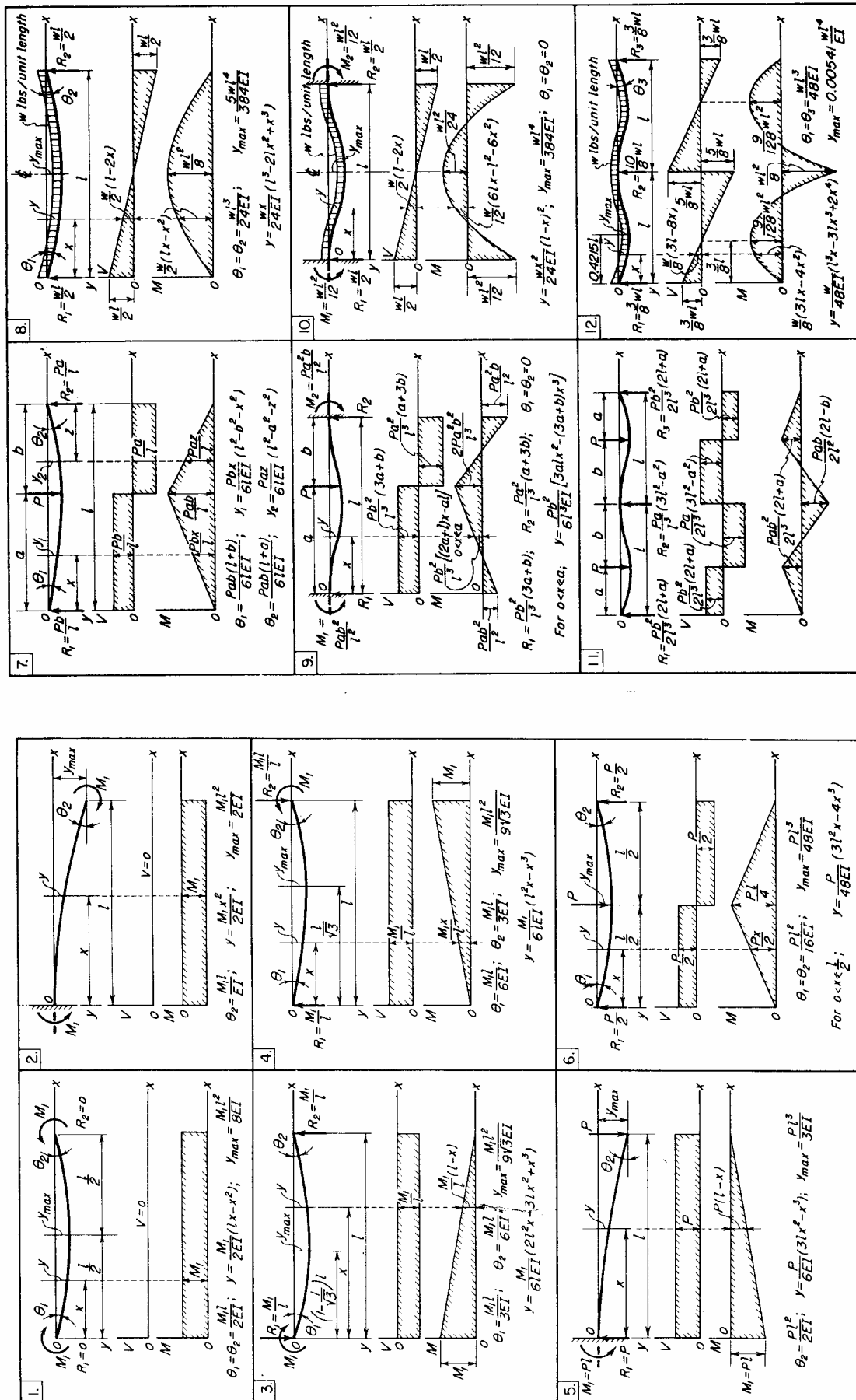
$$y'(x) = \theta \quad y(x) = f(x)$$

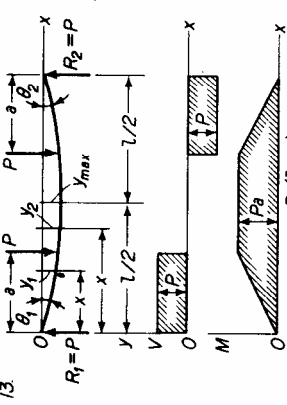
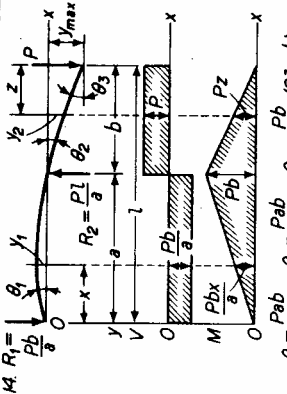
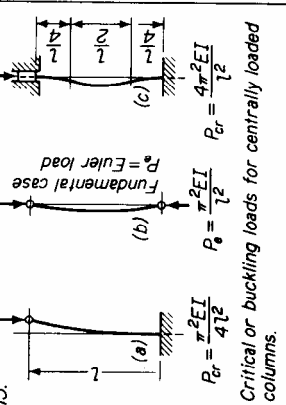
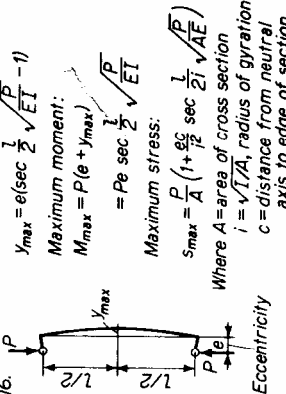
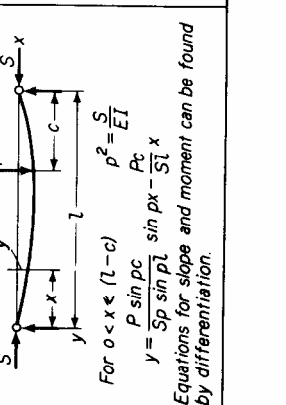
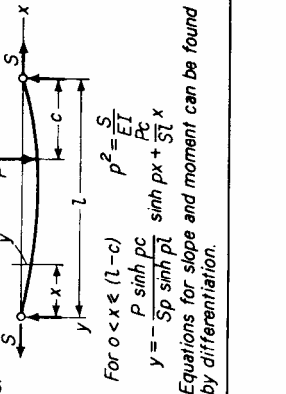
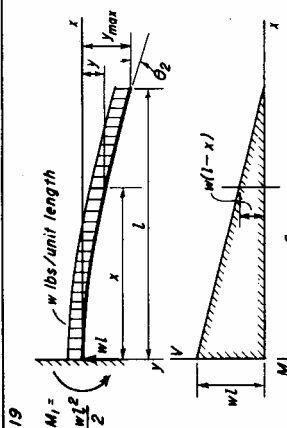
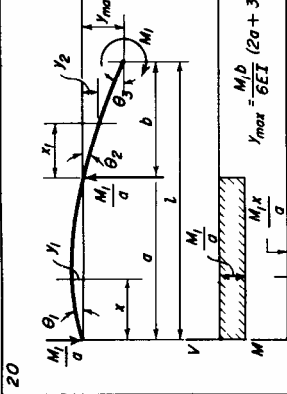
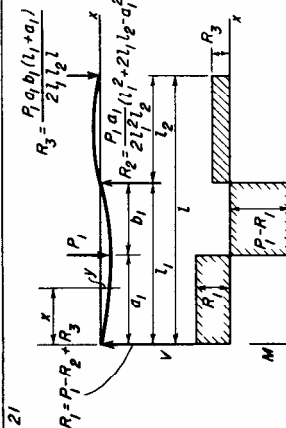
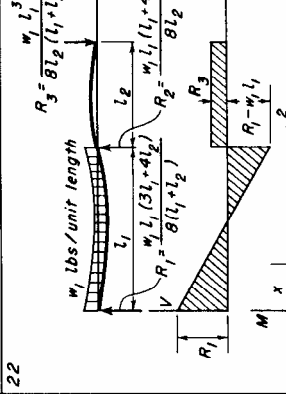
♦ اصل جمع آثار (Superposition):

تغییر شکل در اثر ترکیبی از بارگذاری های مختلف برابر است با مجموع تغییر شکل های حاصل در اثر اعمال بارهای جداگانه.

- ❖ اعتبار اصل جمع آثار در محدوده رفتار خطی معادلات حاکم بین بار و جابجایی است.
- ❖ در حالات تغییر شکل های بسیار کوچک در مسائل الاستیسیته خطی، با استفاده از جمع آثار امکان ترکیب توزیع تنش ها یا جابجایی ها برای تحلیل سیستم های پیچیده میسر است.





13.  $R_1 = P$, $R_2 = P$ For $0 < x \leq a$, $y_1 = \frac{Px}{6EI} [3a(1-a) - x^2]$ For $a \leq x \leq (1-a)$, $y_2 = \frac{Pa}{6EI} [3x(1-x) - a^2]$ $y_{max} = \frac{Pa}{24EI} (3l^2 - 4a^2)$ $\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pa(1-a)}{2EI}$	14.  $R_1 = \frac{Pb}{a}$, $R_2 = \frac{P}{a}$ For $0 < x \leq a$, $y_1 = \frac{Pbx}{6aEI} (x^2 - a^2)$ For $0 < z \leq b$, $y_2 = \frac{P}{6EI} [z^3 - b(2l + b)z + 2b^2l]$ $y_{max} = \frac{Pb^2l}{3EI}$ $\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pab}{6EI}$, $\theta_3 = \frac{Pb}{6EI} (2l + b)$
15.  $R_1 = \frac{P}{2}$, $R_2 = \frac{P}{2}$ For $0 < x \leq l/2$, $y_1 = \frac{Px^2}{4EI} (3l - x)$ For $l/2 \leq x \leq l$, $y_2 = \frac{P(l-x)^2}{4EI} (3l - (l-x))$ $y_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}$ $\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EI}$	16.  $R_1 = \frac{P}{2}$, $R_2 = \frac{P}{2}$ For $0 < x \leq l/2$, $y_1 = \frac{Px^2}{4EI} (3l - x)$ For $l/2 \leq x \leq l$, $y_2 = \frac{P(l-x)^2}{4EI} (3l - (l-x))$ $y_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}$ $\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EI}$
17.  $R_1 = \frac{P}{2}$, $R_2 = \frac{P}{2}$ For $0 < x \leq l/2$, $y_1 = \frac{Px^2}{4EI} (3l - x)$ For $l/2 \leq x \leq l$, $y_2 = \frac{P(l-x)^2}{4EI} (3l - (l-x))$ $y_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}$ $\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EI}$	18.  $R_1 = \frac{P}{2}$, $R_2 = \frac{P}{2}$ For $0 < x \leq l/2$, $y_1 = \frac{Px^2}{4EI} (3l - x)$ For $l/2 \leq x \leq l$, $y_2 = \frac{P(l-x)^2}{4EI} (3l - (l-x))$ $y_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}$ $\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EI}$
19.  $M_1 = \frac{wL^2}{2}$ For $0 \leq x \leq l$, $y_1 = \frac{wx^3}{6EI} (3l - x)$ For $l \leq x \leq 2l$, $y_2 = \frac{w(2l-x)^3}{6EI} (3l - (2l-x))$ $y_{max} = \frac{wL^4}{8EI}$ $\theta_1 = \theta_2 = \frac{wL^3}{6EI}$	20.  $M_1 = \frac{wL^2}{2}$ For $0 \leq x \leq l$, $y_1 = \frac{wx^3}{6EI} (3l - x)$ For $l \leq x \leq 2l$, $y_2 = \frac{w(2l-x)^3}{6EI} (3l - (2l-x))$ $y_{max} = \frac{wL^4}{8EI}$ $\theta_1 = \theta_2 = \frac{wL^3}{6EI}$
21.  $R_1 = \frac{P}{2}$, $R_2 = \frac{P}{2}$ For $0 < x \leq l/2$, $y_1 = \frac{Px^2}{4EI} (3l - x)$ For $l/2 \leq x \leq l$, $y_2 = \frac{P(l-x)^2}{4EI} (3l - (l-x))$ $y_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}$ $\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EI}$	22.  $R_1 = \frac{P}{2}$, $R_2 = \frac{P}{2}$ For $0 < x \leq l/2$, $y_1 = \frac{Px^2}{4EI} (3l - x)$ For $l/2 \leq x \leq l$, $y_2 = \frac{P(l-x)^2}{4EI} (3l - (l-x))$ $y_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}$ $\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EI}$

Deflections can be found by elementary equations and superposition

Deflections can be found by elementary equations and superpositions

Equations for slope and moment can be found by differentiation.

Equations for slope and moment can be found by differentiation.